1 OSNOVNE OSOBINE SKUPA KOMPLEKSNIH BROJEVA I NJEGOVIH PODSKUPOVA

Polje realnih brojeva

Neka su u skupu R definirani sabiranje + i množenje te binarna relacija $\leq$ i neka su za sve $x, y, z \in R$ zadovoljeni uvjeti:

(R.1) $(x+y)+z = x+(y+z),$

(R.2) $(\exists 0 \in R)(\forall x \in R)x+0 = x,$

(R.3) $(\forall x \in R)(\exists(-x) \in R)x+(-x) = 0,$

(R.4) $x+y = y+x,$

(R.5) $x(yz) = (xy)z,$

(R.6) $x(y+z) = xy+xz,$

(R.7) $(\exists 1 \in R \setminus \{0\})(\forall x \in R)x \cdot 1 = x,$

(R.8) $(\forall x \in R \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in R)x \cdot x^{-1} = 1,$

(R.9) $xy = yx,$

(R.10) $(x \leq y) \vee (y < x),$

(R.11) $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y,$

(R.12) $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z),$

(R.13) $(x \leq y) \Rightarrow (x+z \leq y+z),$

(R.14) $(x \leq y) \wedge (z > 0) \Rightarrow (xz \leq yz),$

(R.15) Svaki odozgo ograničen neprazan skup u R ima supremum u R.

Tada uređenu četvorku $(R,+,\cdot,\leq)$ zovemo ***uređeno kompletno polje*** ili ***polje realnih brojeva*** i to polje označavamo sa $\mathbb{R}$. Aksiom (R.15) izražava bitno svojstvo skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ koje zovemo ***kompletnost*** skupa $\mathbb{R}$.

Prirodni brojevi

Bitne osobine skupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva mogu se izraziti sljedećim teoremom:

Teorem (Peanovi aksiomi)

(N.1) $1 \in \mathbb{N},$

(N.2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}(n+1=n^+)$,

(N.3) $(\forall m,n \in \mathbb{N}) m^+ = n^+ \Rightarrow m=n, (\pi : n \to n^+ injekcija)$,

(N.4) $(\forall n \in \mathbb{N})\, n^+ \neq 1$,

(N.5) Ako je M podskup od $\mathbb{N}$ sa osobinama:

$$1 \in M \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(n \in M \Rightarrow n^+ \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}.$$

Peti Peanov aksiom (***Princip matematičke indukcije***) je moćno sredstvo pri dokazivanju iskaza koji se odnose na prirodne brojeve i pri definiranju funkcija. Metoda se sastoji u sljedećem: *ako neka tvrdnja vrijedi za* $n=1$ *i ako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za* $n=k$ *slijedi da tvrdnja vrijedi za* $n=k+1$*, onda tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.*

Skup $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva:

Stavimo $-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}, \mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. Tada se $\mathbb{Z}$ zove skup cijelih brojeva.

Skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva i skup I iracionalnih brojeva:

Skup $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{n} : x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ nazivamo skup ***racionalnih brojeva***. Skup $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zove se skup ***iracionalnih brojeva***. Npr. jednostavno se dokazuje da $\sqrt{2} \in I$. Skup koji ima jednak kardinalni broj kao skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je prebrojiv skup. Drugim riječima, skup A je prebrojiv ako i samo ako postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$. Prebrojivi su skupovi npr. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a neprebrojivi su npr. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, skup transcedentnih brojeva. Inače, broj dobiven iz cijelih brojeva pomoću konačno primjena operacija sabiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja te vađenja *n*-tih korijena, gdje je $n \in \mathbb{N}$ jeste ***algebarski broj***. Naime, to je broj koji je rješenje neke algebarske jednadžbe s cijelim koeficijentima. Realan broj koji nije rješenje ni jedne algebarske jednadžbe s cijelim koeficijentima je ***transcendentan broj***. Takvi su npr. brojevi $\pi, e, \ln 2, 2^{\sqrt{2}}$. Transcedentnih brojeva ima više nego algebarskih brojeva.

1.1. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Iskaz je tačan za svaki prirodan broj n ($n \geq n_0$)
1° ako je tačan za prirodan broj n_0 ($n_0 \geq 1$) i
2° ako iz pretpostavke da je tačan za prirodan broj k ($k \geq n_0$) slijedi da je tačan i za broj $k + 1$.

ZADACI

Dokazati sljedeće tvrdnje matematičkom indukcijom:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{1}{2} n(n + 1)$

b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

c) $1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 (i+1) = \dfrac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+1)$

e) $\sum_{i=1}^{n} i!i = (n+1)! - 1$

f) $\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

g) $(1 + h)^n \geq 1 + nh,\ h > -1$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

i) $2^n > n$

j) $3 \mid f(n) = 5^n + 2^{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$

k) $54 \mid f(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

Rješenje:

a) Provjerimo da li je formula tačna za $k = 1$:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$$
$$1 = 1 \quad T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za k + 1.

S(k) = 1 + 2 + 3 + . . . + k = $\frac{1}{2}k(k+1)$ (po pretpostavci)

S(k + 1) = 1 + 2 + 3 + . . . + k + (k + 1) = S(k) + (k + 1) =

$$\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)=(k+1)(\frac{1}{2}k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$, pa prema principu matematičke indukcije vrijedi za sve prirodne brojeve, tj. $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Provjerimo da li je formula tačna za k = 1:

$$1=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot (1+1)(2+1)$$
$$1=1 \;\; T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za k + 1.

$S(k)=1^2+2^2+...+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ (po pretpostavci)

$$S(k+1)=1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=S(k)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=(k+1)(\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1))=$$
$$=(k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=(k+1)\frac{2k^2+3k+4k+6}{6}=$$
$$=(k+1)\frac{2k(k+2)+3(k+2)}{6}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$$

Tvrdnja vrijedi i za k + 1, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

c) Provjerimo da li je formula tačna za k = 1:

$$1=(-1)^{1-1}\frac{1}{2}\cdot(1+1)$$
$$1=1 \;\; T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za k + 1.

$$S(k) = 1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(po pretpostavci)}$$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= 1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^k(k+1)((-1)\frac{k}{2} + (k+1)) \\ &= (-1)^k(k+1)(\frac{k}{2}+1) = \\ &= (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

d) Provjerimo da li je formula tačna za $k = 1$:

$$1(1+1) = \frac{1}{12}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2)(3+1)$$
$$2 = 2 \ \ T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za $k + 1$.

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} i^2(i+1) = \frac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+1) \quad \text{(po pretpostavci)}$$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2(i+1) = S(k) + (k+1)^2(k+2) \\ &= \frac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+1) + (k+1)^2(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)(\frac{1}{12}k(3k+1) + k + 1) \\ &= (k+1)(k+2)\frac{3k^2 + k + 12k + 12}{12} \end{aligned}$$

$$= (k+1)(k+2)\frac{3k^2+9k+4k+12}{12}$$
$$= (k+1)(k+2)\frac{3k(k+3)+4(k+3)}{12}$$
$$= \frac{1}{12}(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za k + 1, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

e) Provjerimo da li je formula tačna za k = 1:

$$1!\cdot 1 = (1+1)! - 1$$
$$1 = 1 \ \ T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za k + 1.

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} i!i = (k+1)! - 1 \text{ (po pretpostavci)}$$

$$S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i!i = S(k) + (k+1)!(k+1) = (k+1)! - 1 + (k+1)!(k+1)$$
$$= (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+2)(k+1)! - 1$$
$$= (k+2)! - 1$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za k + 1, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

f)Provjerimo da li je formula tačna za k = 1:

$$1\cdot 2^1 = (1-1)\cdot 2^{1+1} + 2$$
$$2 = 2 \ \ T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za k + 1.

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} i2^i = (k-1)2^{k+1} + 2 \qquad \text{(po pretpostavci)}$$

$$S(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1} i2^i = S(k)+(k+1)2^{k+1}=(k-1)2^{k+1}+2+(k+1)2^{k+1}$$
$$=2^{k+1}(k+1+k-1)+2$$
$$=2^{k+1}2k+2=2^{k+2}k+2$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za k + 1, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

g) Provjerimo da li je formula tačna za k = 1:

$$(1+h)^1 \geq 1+1\cdot h$$
$$1+h\geq 1+h \quad T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k\geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za k + 1.

$$S(k)=(1+h)^k \geq 1+kh \text{ (po pretpostavci)}$$
$$S(k+1)=(1+h)^{k+1}=S(k)(1+h)\geq (1+kh)(1+h) \text{ (jer je } 1+h>0)$$
$$=1+h+kh+kh^2=1+(k+1)h+kh^2$$
$$\geq 1+(k+1)h, \text{ jer je } kh^2\geq 0 \text{ za } \forall k\in\mathbb{N},\ \forall h\in\mathbb{R}$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za k + 1, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

h) Provjerimo da li je nejednakost tačna za k = 1:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}\geq\sqrt{1}$$
$$1\geq 1 \ T$$

Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $k\geq 1$, i pokažimo da je onda nejednakost tačna i za k + 1.

$$S(k)=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{k}$$
$$S(k+1)=S(k)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k}+\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}=\frac{(k+1)\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{k+1}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}\sqrt{k}+1)}{k+1}\geq\frac{\sqrt{k+1}(\sqrt{k}\sqrt{k}+1)}{k+1}=\frac{\sqrt{k+1}(k+1)}{k+1}=\sqrt{k+1}$$
$$\Rightarrow S(k+1)\geq\sqrt{k+1}$$

Vidimo da nejednakost vrijedi i za k + 1, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

i) Provjerimo da li je nejednakost tačna za $k = 1$:

$$2^1 \geq 1 \ \ T$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za $k + 1$.

$S(k) = 2^k > k$

$S(k+1) = 2^{k+1} = S(k) \cdot 2 > 2k = k + k \geq k + 1$

(jer je po pretpostavci $k \geq 1$)

$\Rightarrow S(k+1) \geq k+1$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

j) Provjerimo da li je tvrdnja tačna za $k = 0$:

$f(0) = 5^0 + 2^{0+1} = 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow 3 \mid 3 \ T$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za $k + 1$.

$f(k) = 5^k + 2^{k+1}, 3 \mid f(k)$ (po pretpostavci)

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 5^{k+1} + 2^{k+2} = 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = \\ &= 2(5^k + 2^{k+1}) + 3 \cdot 5^k \\ &= 2f(k) + 3 \cdot 5^k \end{aligned}$$

Očigledno je drugi sabirak djeljiv sa 3. Prvi sabirak je djeljiv sa 3 po pretpostavci. Odavde imamo da je i njihov zbir djeljiv sa 3, tj.$3 \mid f(k+1)$.

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$, pa vrijedi za sve prirodne brojeve.

k) Provjerimo da li je tvrdnja tačna za $n = 1$:

$f(1) = 2^{2\cdot 1+1} - 9 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 8 - 9 + 3 - 2 = 0 \ \Rightarrow 54 \mid 0 \ \ T$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k \geq 1$, i pokažimo da je onda tvdnja tačna i za $k + 1$.

$54 \mid f(k) = 2^{2\cdot k+1} - 9 \cdot k^2 + 3 \cdot k - 2$ (po pretpostavci)

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= 2^{2\cdot(k+1)+1} - 9\cdot(k+1)^2 + 3\cdot(k+1) - 2 \\
&= 4(2^{2\cdot k+1} - 9\cdot k^2 + 3\cdot k - 2) + 3\cdot 9k^2 - 27k \\
&= 4(2^{2\cdot k+1} - 9\cdot k^2 + 3\cdot k - 2) + 27k(k-1)
\end{aligned}
$$

Ako je k paran broj, tada je on djeljiv sa 2, pa je i $k(k-1)$ djeljivo sa 2. Ako je k neparan broj, tada je $k-1$ paran broj, pa je djeljiv sa 2. Odavde slijedi da je $27k(k-1)$ djeljivo sa 54. Iz ovog i induktivne pretpostavke slijedi da je $f(k+1)$ djeljivo sa 54, što je trebalo dokazati. Sada prema principu matematičke indukcije $54 \mid f(k)$, za svaki prirodan broj k.

Zadaci za samostalan rad

2. Matematičkom indukcijom dokaži djeljivost:

a) $64 \mid f(n) = 3^{2n+3} + 40n - 27, n = 0,1,2,...$

b) $9 \mid f(n) = 2^{2n} - 3n - 1, n \geq 2$

c) $133 \mid f(n) = 11^{n+2} + 12^{n+2}, n \geq 0$

3. Metodom matematičke indukcije dokažite:

a) $1\cdot 3 + 3\cdot 5 + ... + (2n-1)(2n+1) = \frac{1}{3}n\left(4n^2 + 6n - 1\right)$

b) $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$

1.2. BINOMNI I TRINOMNI OBRAZAC

Za sve $n,k \in N$ definiramo:

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n, \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. (Izraz $n!$ čitamo: *en faktorijel*; Izraz $\binom{n}{k}$ čitamo: *en nad k.*

Vrijedi:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ i } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomna formula:

Za sve $a,b \in \mathbb{R}$ i sve $n \in \mathbb{N}$ je:

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,$ ili kraće $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$

Brojevi $\binom{n}{k}$ zovu se *binomni koeficijenti*.

Trinomna formula:

Za sve $a,b,c \in R$ i sve $n \in N$ je: $\quad (a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} a^i b^j c^k.$

ZADACI

1. Naći zbirove:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$

Rješenje:

a) $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = 0$

c) $2^n = 2^n + 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots)$

$\Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = 2^{n-1}$

2. Dokazati:

a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, k \in \mathbb{N}$

c) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Rješenje:

a) $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

b) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad (2)$$

Sada, upoređivanjem jednakosti (1) i (2) dobijamo jednakost:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, k \in \mathbb{N}$$

c) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$$

$$= \frac{n!(n+1-k) + n!k}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

3. Naći racionalne sabirke u razvoju $(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x})^{10}$.

Rješenje:

$$S_{k+1} = \binom{10}{k} x^{\frac{3}{4}k} x^{\frac{1}{3}(10-k)}, k = 0,1,\ldots,10$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = \binom{10}{k} x^{\frac{9k+40-4k}{12}} = \binom{n}{k} x^{\frac{5k+40}{12}}$$

$$\Rightarrow 5k + 40 = 12s, s \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \le k = \frac{12s-40}{5} \le 10, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 40 \le 12s \le 90 \wedge k \in \mathbb{Z} \Rightarrow s = 5, k = 4 \Rightarrow S_5 = \binom{10}{4} x^5 = 210x^5$$

4. U razvoju binoma $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} \right)^{12}$ odrediti član koji ne sadrži x.

Rješenje: Za proizvoljno $k \in \{0,1,2,...,12\}$ imamo da je

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} \left(x\sqrt[4]{x} \right)^{12-k} \left(\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} \right)^k = \binom{12}{k} \left(x^{\frac{5}{4}} \right)^{12-k} \left(x^{\frac{-5}{8}} \right)^k =$$

$$= \binom{12}{k} x^{\frac{5(12-k)}{4}} x^{-\frac{5k}{8}} = \binom{12}{k} x^{\frac{5(12-k)}{4} - \frac{5k}{8}} = \binom{12}{k} x^{\frac{120-15k}{8}}.$$

Otuda, riješićemo jednačinu $120 - 15k = 0$. Imamo da je $15k = 120 \Rightarrow k = 8$, pa je traženi član deveti.

5. Koliko racionalnih članova ima u razvoju $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$.

Rješenje:

$$\Rightarrow S_{k+1} = \binom{100}{k} 2^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{\frac{100-k}{4}}, k = 0,1,\ldots 100$$

$$\Rightarrow 100 - k = 4s \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \le k \le 100 \Rightarrow 0 \le s \le 25, s \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{4s \mid s = 0,1,...,25\}$$

U razvoju $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ postoji 26 racionalnih članova.

6. Dokazati:

a) $17 \mid f(n) = 54^n + 3^n \cdot 16$

b) $3 \mid f(n) = 11 \cdot 10^{2n} + 1$

Rješenje:

a) $f(n)=54^n+3^n\cdot 16=3^n\left(18^n+16\right)\Rightarrow\left(17\mid f(n)\Leftrightarrow 17\mid\left(18^n+16\right)\right)$

$$18^n+16=\left(17+1\right)^n+16=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}17^k\cdot 1^{n-k}+16=$$

$$=1+17\left(n+17\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+17^{n-1}\right)+16$$

$$=17\left(1+n+17\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+17^{n-1}\right)\Rightarrow 17\mid f(n)$$

b) $f(n)=11\cdot 10^{2n}+1=11\cdot(9+1)^{2n}+1=11\cdot\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}9^k+1$

$$=11+11\cdot 9\cdot\left(2n+9\cdot\frac{2n(2n-1)}{2}+\ldots+9^{2n-1}\right)+1$$

$$=11\cdot 9\cdot\left(2n+9\cdot\frac{2n(2n-1)}{2}+\ldots+9^{2n-1}\right)+12$$

$f(n)$ smo napisali kao sumu od dva sabirka. Oba sabirka su djeljiva sa 3, pa odavde imamo da je i $f(n)$ djeljiv sa 3.

7. Dokazati trinomni obrazac:

$$(a+b+c)^n=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}a^ib^jc^k$$

Rješenje:

$$(a+b+c)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a+b)^{n-k}c^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}a^{n-k-j}b^j\right)c^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}a^{n-k-j}b^jc^k=\left|\begin{matrix}n-k-j=i\\ i+j+k=n\end{matrix}\right|$$

$$=\sum_{i+j+k=n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}a^ib^jc^k=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}a^ib^jc^k$$

8. Odrediti koeficijent uz x^7 u razvoju $(x^2-x+1)^5$.

Rješenje:

$$(x^2-x+1)^5=\sum_{i+j+k=5}\frac{5!}{i!j!k!}x^{2i}(-x)^j1^k=\sum_{i+j+k=5}\frac{5!}{i!j!k!}x^{2i+j}(-1)^j$$

$$2i+j=7 \Rightarrow \begin{cases} i=2, j=3, k=0 \\ i=3, j=1, k=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{120}{2\cdot 6}(-1)^3+\frac{120}{6}(-1)=-10-20=-30$$

Koeficijent uz x^7 iznosi (– 30).

9. Odrediti koeficijent uz x^5 u razvoju $(x^3+x-2)^6$.

Rješenje:

$$(x^3+x-2)^6=\sum_{i+j+k=6}\frac{6!}{i!j!k!}x^{3i}\cdot x^j\cdot(-2)^k=\sum_{i+j+k=6}\frac{6!}{i!j!k!}x^{3i+j}(-2)^k$$

$$3i+j=5 \Rightarrow \begin{cases} i=0, j=5, k=1 \\ i=1, j=2, k=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{720}{120}(-2)+\frac{720}{2\cdot 6}(-2)^3=-12-480=-492$$

Koeficijent uz x^5 iznosi (– 492).

Zadaci za samostalan rad

10. a) Naći racionalne članove u razvoju $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

b) Odrediti član koji sadrži $x^{8,5}$ u razvoju binoma $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^{16}$.

1.3. KOMPLEKSNI BROJEVI

Definirajmo sabiranje i množenje u $\mathbb{R}^2$ sa:

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ (1) i

$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ (2) .

Lako se pomoću aksioma (R.1) – (R.9) realnih brojeva pokaže da je uređena trojka $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ polje. Polje $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ zove se polje kompleksnih brojeva i označava se sa $\mathbb{C}$. Element $i=(0,1)\in\mathbb{C}$ zove se imaginarana jedinica i za svaki $(a,b)\in\mathbb{C}$ prema (1) i (2) imamo:

$$(a,b)=a+ib. \quad (3)$$

Stavimo $z=a+ib$. Tada se realni broj $a=\text{Re}(z)$ zove realni dio kompleksnog broja a realni broj $b=\text{Im}(z)$ zove se imaginarani dio broja

$z \in \mathbb{C}$. Broj $\overline{z} = a - ib$ je konjugovanao kompleksan broj broja $z = a + ib$. Vrijedi:

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 .$$

Realan broj $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ zove se modul (norma, apsolutna vrijednost) kompleksnog broja $z = a + ib$. Vrijedi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{i} \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, (z_1, z_2 \in C).$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja:

$$z = a + ib, a = r\cos\theta, b = r\sin\theta \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge tg\theta = \frac{b}{a}.$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)(0 \le r < +\infty, -\pi < \theta \le \pi)$$

Indukcijom se može dokazati da je:

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), n \in N.$$

Odavde, za $r = 1$ dobija se Muavrova formula:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, n \in N.$$

Formula za korjenovanje kompleksnog broja:

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,...,n-1.$$

Eulerove formule:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, e^{-ix} = \cos x - i\sin x .$$

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \cdot e^{i\cdot\theta} .$$

Vrijedi sljedeće:

$$z_1 \cdot z_2 = re^{i\varphi} \cdot \rho e^{i\psi} = r\rho e^{i(\varphi+\psi)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} .$$

ZADACI

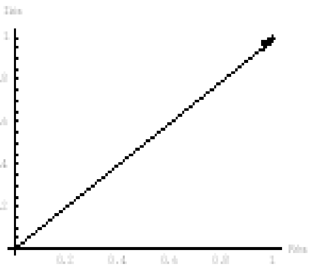
1. Napisati u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku kompleksne brojeve:
   a) $1+i$
   b) $1+i\sqrt{3}$
   c) $1-i$
   d) $-1+i$
   e) $-1-i$

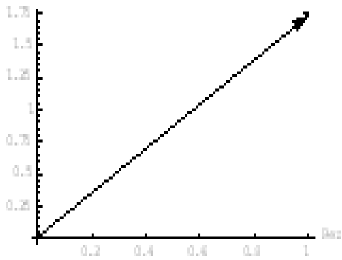
Rješenje:

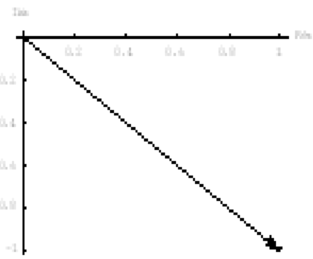
a) $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (slika 1)

b) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (slika 2)

c) $z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ (slika 3)

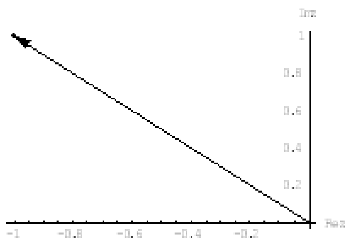

slika 1.

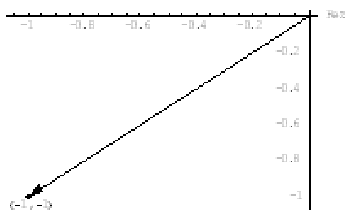

slika 2.


slika 3.

d) $z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (slika 4)

e) $z = -1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ (slika 5)


slika 4.


slika 5.

1. Naći realni i imaginarni dio brojeva:

   a) $z = \dfrac{i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$

   b) $z = \dfrac{1+i}{2-i} \cdot (3 + 2i)$

Rješenje:

a) $z = \dfrac{i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\operatorname{Re} z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2}$

b) $z = \dfrac{1+i}{2-i} \cdot (3+2i) = \dfrac{3+2i+3i-2}{2-i} = \dfrac{1+5i}{2-i} = \dfrac{1+5i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} =$

$= \dfrac{2+i+10i-5}{4+1} = \dfrac{-3+11i}{5}$

$\operatorname{Re} z = \dfrac{-3}{5}, \operatorname{Im} z = \dfrac{11}{5}$

2. Pokazati da je $(1+i)^{4k}$ čisto realan broj, a $(1+i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj ako je $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje:

$$z_1 = (1+i)^{4k} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{4k} = \sqrt{2^{4k}}\, e^{ik\pi} = 2^{2k}(\cos k\pi + i\sin k\pi)$$
$$= (-1)^k 2^{2k} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$
$$z_2 = (1+i)^{4k+2} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{4k+2} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2(2k+1)} = 2^{2k+1}e^{i\frac{\pi}{2}} =$$
$$= 2^{2k+1}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i2^{2k+1}$$

Realni dio od z_2 je jednak 0, pa je z_2 čisto imaginaran broj.

3. Izračunati

a) $(1+i\sqrt{3})^3$

b) $\left(1+i\right)^{10}$

c) $(1+\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})^6$

d) $\sqrt[3]{-1}$

e) $\sqrt[4]{1}$

f) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$

g) $\sqrt[5]{1+i}$

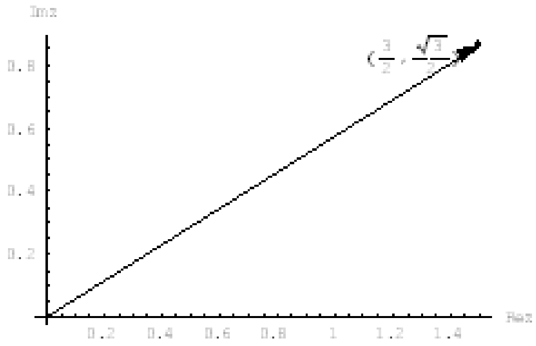
Rješenje:

a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^3 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = 8e^{i\pi} = -8$

b) $z_2 = (1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = 32e^{i\frac{5}{2}\pi} = 32i$

c) $z_3 = (1+\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^6 = (\sqrt{(1+\cos\frac{\pi}{3})^2 + \sin^2\frac{\pi}{3}}\, e^{i\frac{\pi}{6}})^6 = (\sqrt{3})^6 e^{i\pi} = -27$

(slika 6)



slika 6.

d)

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

f)

$$-8 + 8i\sqrt{3} = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 0\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot1\cdot\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot1\cdot\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$z_2=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot2\cdot\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot2\cdot\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$z_3=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot3\cdot\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\cdot3\cdot\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i$$

4. Naći primjenom Moivreovih obrazaca: $\sin 3x, \cos 3x, \sin 4x, \cos 4x$.

Rješenje:

a) $(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\cos^3 x+3(\cos^2 x)i\sin x+3(\cos x)i^2\sin^2 x+i^3\sin^3 x=\cos 3x+i\sin 3x$$

Izjednačavanjem imaginarnih i realnih dijelova dobijamo:

$$\cos 3x=\cos^3 x-3(\cos x)\sin^2 x=\cos^3 x-3(\cos x)(1-\cos^2 x)$$

$$=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\sin 3x=3(\cos^2 x)\sin x-\sin^3 x=3(1-\sin^2 x)\sin x-\sin^3 x$$

$$=-4\sin^3 x+3\sin x$$

b) $(\cos x+i\sin x)^4=\cos 4x+i\sin 4x$

Po binomnoj formuli:

$$(a+b)^4 = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4\cos^3 x(i\sin x) + 6\cos^2 x(i\sin x)^2 + 4\cos x(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4$$
$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x +$$
$$+ i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)$$
$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x) +$$
$$+ i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin x(1-\cos^2 x))$$
$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x +$$
$$+ i\sin x(4\cos^3 x - 4\cos x + 4\cos^3 x)$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 + i\sin x(8\cos^3 x - 4\cos x)$$

Izjednačavanjem imaginarnih i realnih dijelova dobijamo:

$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$\sin 4x = \sin x(8\cos^3 x - 4\cos x)$.

5. Izraziti preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova izraze: $\sin^3 x, \cos^3 x, \sin^4 x, \cos^4 x$.

Rješenje: Koristićemo jednakosti koje smo dobili u prethodnom zadatku:

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \Rightarrow \cos^4 x = \frac{\cos 4x + 8\cos^2 x + 1}{8} =$$
$$= \frac{\cos 4x + 8\dfrac{1+\cos 2x}{2} + 1}{8}$$
$$= \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 5}{8}$$

$$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$
$$= 8(1-\sin^2 x)^2 - \frac{8(1+\cos 2x)}{2} + 1$$
$$= 8(1-2\sin^2 x + \sin^4 x) - 4 - 4\cos 2x + 1 =$$
$$= 8 - 16\frac{1-\cos 2x}{2} + 8\sin^4 x - 4\cos 2x - 3$$
$$= 8\sin^4 x + 4\cos 2x - 3 \Rightarrow \sin^4 x = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$$

Ovaj zadatak možemo uraditi i na sljedeći način:

$$\sin^3 x = (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3 = \frac{e^{i3x} - 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2i} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} =$$
$$= \frac{2i\sin 3x - 6i\sin x}{-8i} = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$
$$\cos^3 x = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^3 = \frac{e^{i3x} + 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2i} + e^{-3ix}}{8} = \frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} =$$
$$= \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{-8i} = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

Analogno možemo izračunati $\cos^4 x, \sin^4 x$ ili uopšteno $\sin^n x$ i $\cos^n x, n \in \mathbb{N}$, ali bi nam tada bila od velike pomoći binomna formula.

6. Riješiti jednačine:

$z^6 - 1 + i = 0$

$(z+1)^n - (z-1)^n = 0$

$(1+z)^n - i(1-z)^n = 0$

$(1+z)^n + (z-1)^n = 0$

Rješenje:

a) $z^6 - 1 + i = 0 \Rightarrow z^6 = 1 - i \Rightarrow z_k = \sqrt[12]{2}(\cos\frac{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi}{6}) =$

$$= \sqrt[12]{2}(\cos\frac{8k\pi - \pi}{24} + i\sin\frac{8k\pi - \pi}{24}); k = 0,1,\ldots 5$$

b) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \Rightarrow (z+1)^n = (z-1)^n \Rightarrow \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1$

$$\Rightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1\Rightarrow\frac{z+1}{z-1}=\sqrt[n]{1}$$

$$\Rightarrow\frac{z_k+1}{z_k-1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};k=0,1\ldots(n-1)$$

$$\Rightarrow z_k+1=(z_k-1)(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_k(1-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}))=-1-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})$$

$$\Rightarrow z_k=\frac{-1-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})}{(1-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}))}$$

$$\Rightarrow z_k=\frac{-\sin^2\frac{k\pi}{n}-\cos^2\frac{k\pi}{n}-\cos^2\frac{k\pi}{n}+\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}+\cos^2\frac{k\pi}{n}-\cos^2\frac{k\pi}{n}+\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow z_k=\frac{-2\cos^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow z_k=\frac{-2\cos\frac{k\pi}{n}(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})}{2\sin\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n})}$$

$$\Rightarrow z_k=-(ctg\frac{k\pi}{n})\frac{(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})(\sin\frac{k\pi}{n}+i\cos\frac{k\pi}{n})}{(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n})(\sin\frac{k\pi}{n}+i\cos\frac{k\pi}{n})}$$

$$\Rightarrow z_k=-(ctg\frac{k\pi}{n})\frac{\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}+i\cos^2\frac{k\pi}{n}+i\sin^2\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n}+\sin^2\frac{k\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow z_k=-ictg\frac{k\pi}{n};k=0,1,\ldots(n-1)$$

c) $z_k=itg\frac{4k+1}{n}\pi;k=0,1,\ldots(n-1)$

d) $z_k = -ictg\frac{2k+1}{2n}\pi; k = 0,1,\ldots(n-1)$

7. Dokazati:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Rješenje:

$$s(n) = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$
$$s(n) - qs(n) = 1 - q^{n+1}$$
$$s(n)(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
$$s(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$z + z^2 + \ldots + z^n = z(1 + z + \ldots + z^{n-1}) = z\frac{z^n - 1}{z-1}$$
$$z = e^{ix} = \cos x + i\sin x, x \in \mathbb{R}$$
$$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \frac{z(z^n-1)}{z-1} = \frac{e^{ix}(e^{inx}-1)}{e^{ix}-1} = \frac{e^{ix}(1-\cos nx - i\sin nx)}{1-\cos x - i\sin x}$$
$$= \frac{e^{ix}(2\sin^2\frac{nx}{2} - 2i\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2})}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{e^{ix}\cdot 2\sin\frac{nx}{2}(\sin\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2})}{2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2})}$$
$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{e^{ix}i(\sin\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2})}{i(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2})} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{e^{ix}(i\sin\frac{nx}{2} + \cos\frac{nx}{2})}{i\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{e^{ix}e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}e^{i\frac{n+1}{2}x} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x)$$

Prema Moivreovoj formuli imamo da je realni dio od $1 + z + z^2 + \ldots + z^n$ jednak sumi $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$, a imaginarni dio je jednak sumi $\sin x + \sin 2x + \ldots \sin nx$. Odavde imamo da je:

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

8. Ako $n \in \mathbb{N}$ dokazati da je:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots = \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$$

Rješenje:
Izračunajmo z^n, gdje je $z = 1 + i$. Primjenom binomne formule dobićemo:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k 1^{n-k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots + i\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right) \tag{1}$$

S druge strane, primjenom Moivrove formule dobijamo:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \tag{2}$$

Upoređivanjem jednakosti (1) i (2) dobijamo jednakosti koje smo trebali dokazati.

9. Dokazati:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\varphi = 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\varphi = 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}$$

Rješenje:
Uzmimo da je $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$ i posmatrajmo z^n.
Prema binomnoj formuli imamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\varphi+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\varphi \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Vidimo da su sume koje trebamo izračunati ustvari realni i imaginarni dio broja z^n. Izračunati ćemo z^n bez korištenja binomne formule:

$$
\begin{aligned}
(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n &= (\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2})^n \\
&= (2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}))^n \\
&= 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}) \qquad (2) \\
&= 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})^n \\
&= 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}+i2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}
\end{aligned}
$$

S obzirom da lijeve strana u (1) i (2) su jednake, to možemo izjednačiti desne strane u (1) i (2). Iz jednakosti dva kompleksna broja zaključujemo da vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\varphi = 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\varphi = 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}.$$

Zadaci za samostalan rad:

10. Izračunati:

a) $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{7}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}$ b) $\sqrt[3]{-i}$

c) $z=\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{17}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$ d) $\sqrt[3]{i+1}$

e) $z=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{22}\cdot(2+i)^{44}}{(3+4i)^{23}}$ f) $\sqrt[4]{i-1}$

11. Izračunati realan i imaginarni dio kompleksnog broja: $z=\dfrac{z_1+z_2{}^{6}}{2+z_1z_2}$,

$z_1=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}, z_2=3(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

2 LINEARNA ALGEBRA

2.1. DETERMINANTE

Determinanata n-tog reda kvadratne matrice $A=\left[a_{ij}\right]$ je zbir od $n!$ sabiraka

$$D=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{Inv(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} \; .$$

<u>Napomena</u>: Neka je $(j_1 j_2 j_3 \dots j_n)$ jedna od $n!$ permutacija brojeva $1,2,\dots,n$. Brojevi j_i i j_k u toj permutaciji čine jednu inverziju ako u njoj dolazi j_i prije j_k, dok je inače $j_i > j_k$. Tako, na primjer, u permutaciji $(3 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \quad 2)$ od pet elemenata broj 3 čini dvije inverzije jer je ispred 1 i ispred 2. Broj 4 čini dvije inverzije, 5 dvije, 1 nula i 2 čini nula inverzija. Dakle, ukupan broj inverzija te permutacije je 6, $\mathrm{Inv}(3 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \quad 2)=6$.

Ovako definisan broj $\det \mathrm{A}$ naziva se determinanta reda n matrice A, ili kraće determinanta reda n.

Svojstva determinanti.

1. Ako su svi elementi nekog retka ili stupca nule, onda je determinanta jednaka nuli.
2. Ako su ispod ili iznad glavne dijagonale nule, onda je determinanta jednaka produktu brojeva na glavnoj dijagonali.
3. Ako dva stupca ili dva retka zamijene mjesta, onda determinanta mijenja znak.
4. Ako su dva stupca ili dva retka jednaka, onda je determinanta jednaka nuli.
5. Ako nekom stupcu ili retku dodamo linearnu kombinaciju preostalih stupaca ili redaka, onda se determinanta ne mijenja.
6. Determinanta se množi brojem tako da se neki redak ili stupac pomnoži tim brojem.
7.(Binet-Cauchyjev teorem) Determinanta produkta dvije matrice jednaka je produktu determinanti, tj. $\det(AB)=\det A \det B$.

8.(Laplaceov teorem) $D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. A_{ij} je kofaktor ili algebarski komplement a M_{ij} je minor determinante koji se dobije izostavljanjem i-tog retka i j-tog stupca.

9. Ako je neki stupac ili redak linearna kombinacija preostalih stupaca ili redaka, onda je determinanta jednaka nuli.

10. $\det A = \det A^T$

ZADACI

U sljedećim zadacima (1. – 5.) izračunati determinante :

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(9-8)-(15-2)+3(20-3)$

$$=2-13+51=40$$

Ovdje smo vršili razvijanje determinante po prvoj vrsti .

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 16 & 9 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 65 \end{vmatrix} = 65-45=20$

Zapazimo da je s ciljem dobijanja dviju nula u prvoj vrsti oduzeta prva kolona od druge, odnosno treće kolone determinante .

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \ ?$

Uočimo da imamo dvije nule u drugoj vrsti pa je zgodno razviti determinantu po drugoj vrsti:

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -2(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 8(-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$=4(7-12)-24(7-12)=-20+120=100.$$

6. Neka je $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Izračunati determinantu: $D = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$

Rješenje: Na prvu kolonu dodajmo zbir druge i treće kolone. Tada se iz prve kolone može izdvojiti ispred determinante faktor $z^2 + z + 1$ (svojstvo 6):

$$D = \left(z^2 + z + 1\right)\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & 1 & z \\ 1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \left(z^2 + z + 1\right)\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 0 & 1-z & z-z^2 \\ 0 & z^2-z & 1-z^2 \end{vmatrix} =$$

$$\left(1+z+z^2\right)\left[\left(1-z\right)^2\left(1+z\right)+z^2\left(1-z\right)^2\right] = \left(1+z+z^2\right)\left(1-z\right)^2\left(1+z+z^2\right) = \left(1-z^3\right)^2$$

$$=\left(1-1\right)^2=0$$

jer je $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow z^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

7. Riješiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$$

Najprije oduzmimo od treće vrste prvu vrstu:

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=0,$$ pa zatim dodajmo na drugu i treću kolonu determinante prvu kolonu pomnoženu sa (-1), odnosno (-2) respektivno:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 5 & 3x-7 \\ x+2 & -6 & 3x+4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2\begin{vmatrix} 5 & 3x-7 \\ -6 & 3x+4 \end{vmatrix}=0$$

$$5(3x+4)+6(3x-7)=0$$
$$15x+20+18x-42=0$$
$$33x=22$$
$$x=\frac{22}{33}=\frac{2}{3}.$$

8. Izračunati vrijednost sljedećih determinanti:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ (R:40) b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ (R:-68) c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ (R:9)

d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (R:222) e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ (R:640)

f) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (R:-1032)

9. Ako je $z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ izračunati vrijednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} \quad (\text{R: } 3i\sqrt{3})$$

10.Riješiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}-2}{4} \qquad \left(R: \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$$

2.2. MATRICE

Definicija 1 Shemu brojeva

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

zovemo *pravougaonom matricom tipa (m,n)* ili jednostavno *matricom tipa (m,n)*.

Ako je $m = n$ onda kažemo da je *A kvadratna matrica reda n*.
Elementi a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} čine *i-ti redak* a a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj} čine *j-ti stupac*. Element matrice a_{ij} se nalazi u *i*-tom retku i *j*-tom stupcu.

Skup svih matrica tipa (m,n) označavat će se sa M_{mn}. Ako je $m = n$ onda se piše M_n umjesto M_{nn}.
Matrica se kraće zapisuje ovako

$$A = \left[a_{ij}\right].$$

Operacije s matricama

Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}$, gdje je $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$, kažemo da su **jednake** ako je $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

Sabiranje matrica

Sabirati možemo samo matrice istog tipa. Neka su $A, B \in M_{mn}$ gdje je

$A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$

Zbir $A + B$ je matrica tipa (m, n) tako da je

$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$

Množenje matrice brojem.

Proizvod matrice $A = \left[a_{ij}\right]$ i broja λ je matrica λA istog tipa kao i A :

$$\lambda A = \left[\lambda a_{ij}\right].$$

Operacije sabiranja matrica i množenja matrice brojem očito imaju sljedeća svojstva:

1. $(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in M_{mn}$;

2. $A + B = B + A, \forall A, B \in M_{mn}$;
3. Postoji $O \in M_{mn}$ takav da je $A + O = O + A, \forall A \in M_{mn}$ ($O = [0], a_{ij} = 0, \forall i, j$);

4. Postoji $-A \in M_{mn}$ takav da je $A + (-A) = (-A) + A = O$, ($-A = \left[-a_{ij}\right]$);

5. $1A = A, \forall A \in M_{mn}$;

6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_{mn}$;

7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \forall \lambda, \mu \in R, \forall A \in M_{mn}$;

8. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \forall \lambda, \mu \in R, \forall A \in M_{mn}$

Skup M_{mn} zovemo *vektorskim prostorom*.

Množenje matrica

Matrica $A = \left[a_{ij}\right]$ tipa (m,n) i matrica $B = \left[b_{jk}\right]$ tipa (p,q) se mogu pomnožiti tim redom samo ako je $p = n$, tj. ako je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Proizvod AB je matrica tipa (m,q)

$$AB = \left[c_{ik}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]$$

Množenje matrica ima ova svojstva.

1. $(AB)C = A(BC), \forall A, B, C.$

2. $(A+B)C = AC + BC, \forall A, B, C.$

3. $A(B+C) = AB + AC, \forall A, B, C.$

Proizvod nije komutativan, tj. ne vrijedi općenito $AB = BA$.

Transponiranje.

Neka je dana matrica A tipa (m,n)

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matrica, koja se iz A dobije kad reci postanu stupci, označava se sa A^T i ona je tipa (n,m). Zove se **transponovana matrica** matrice A.

Dakle, $$A^T = \left[a_{ij}^{\ T}\right] = \left[a_{ji}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Transponiranje se prema operacijama s matricama odnosi kako slijedi.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T, \forall A, B \in M.$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \forall \lambda \in R, \forall A \in M_{mn}.$
3. $(AB)^T = B^T A^T, \forall A, B \in M_{mn}.$
4. $(A^T)^T = A, \forall A \in M_{mn}.$

Kvadratne matrice

Definicija 3 U kvadratnoj matrici $A=\left[a_{ij}\right]$ reda n elementi $a_{11}, a_{22,\dots,}a_{nn}$ čine **glavnu dijagonalu**.

Kvadratne matrice imaju redaka koliko i stupaca, pa se mogu množiti u bilo kojem poretku, no i u tom slučaju proizvod nije komutativan.

Definicija 4 Neka je A kvadratna matrica. Matrica A zove se:
- **dijagonalna matrica**, ako su joj elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli;
- **gornja trokutasta**, ako su joj elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli;
- **donja trokutasta**, ako su joj elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Definicija 5 Neka je A kvadratna matrica. Matrica A se zove
- **simetrična matrica**, ako je $A^T = A$;
- **antisimetrična matrica**, ako je $A^T = -A$;
- **ortogonalna matrica**, ako je $A^T A = I$.

Inverzna matrica

Definicija 7 Neka je dana matrica $A \in M_n$. Matrica $B \in M_n$ sa svojstvom

$$AB = BA = I$$

se zove **inverzna matrica** matrice A i piše se $B = A^{-1}$. Kvadratna matrica, koja ima inverznu, se zove **regularna**. Kvadratna matrica, koja nema inverznu, se zove **singularna**.

Svojstva skupa regularnih matrica.

1. Proizvod regularnih matrica je regularna matrica i vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Jedinična matrica I je regularna, i $I^{-1} = I$.
3. $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$, za svaki $\lambda \neq 0$.
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
5. $(A^{-1})^{-1} = A$.
6. Ako je A regularna matrica, onda je $\det A \neq 0$.

Nulmatrica množena s bilo kojom matricom daje nulmatricu, pa tako ne postoji njezin inverz. Dakle, nulmatrica je singularna.

Vrijedi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Matrica $A^* = \left[A_{ij}\right]^T$ se zove **adjunkta (adjugovana matrica)** matrice A. Pri tome su A_{ij} kofaktori matrice A.

Matrica A je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$. Dakle:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kažemo da matrica A ima rang r i pišemo $rang\ A = r$ ako postoji bar jedna regularna submatrica matrice A koja je reda r, a sve submatrice reda većeg od r (ako postoje) su singularne. Rang matrice se ne mijenja pri elementarnim transformacijama, a to su

- zamjena dvije vrste ili kolone matrice
- množenje bilo koje vrste matrice nenultim brojem
- dodavanje na neku vrstu matrice neke druge vrste pomnožene nekim brojem.

Rang matrice najlakše tražimo tako da matricu svedemo elementarnim transformacijama na trokutastu.

ZADACI

1. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati: $A+B$, $2A+3B$, $A-B$, $2A-3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^T i B^T.

Rješenje:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A+3B=2\cdot\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 10 & 14\\ 4 & -2 & 0\\ 8 & 6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6 & 12\\ 6 & 9 & -6\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}9 & 16 & 26\\ 10 & 7 & -6\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+10-7 & 6+15 & 12-10+7\\ 2-2 & 4-3 & 8+2\\ 4+6-2 & 8+9 & 16-6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 21 & 9\\ 0 & 1 & 10\\ 8 & 17 & 12\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot3+2\cdot2+4\cdot4 & 1\cdot5+2\cdot(-1)+4\cdot3 & 1\cdot7+2\cdot0+4\cdot2\\ 2\cdot3+3\cdot2+(-2)\cdot4 & 2\cdot5+3\cdot(-1)+(-2)\cdot3 & 2\cdot7+3\cdot0+(-2)\cdot2\\ (-1)\cdot3+0\cdot2+1\cdot4 & (-1)\cdot5+0\cdot(-1)+1\cdot3 & (-1)\cdot7+0\cdot0+1\cdot2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}23 & 15 & 15\\ 4 & 1 & 10\\ 1 & -2 & -5\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 5 & -1 & 3\\ 7 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

2. Naći inverznu matricu matrice

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -12 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -(7-12) = 5$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12-3 = 9 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8+6 = -2 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-6 = -4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5-4 = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12-10 = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+2 = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3-15 = -12 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9+10 = 1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9-2 = 7$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

3. Riješiti jednačinu:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$X \cdot A = B \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 11 & 3 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = -11 + 30 = 19$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 10 = 9 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -25 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 3 = -18$$

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{bmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} -8+27 & 8+30 & 24+33 \\ -5+81 & 5+90 & 15+99 \\ -2+135 & 2+150 & 6+165 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 152 & 171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Riješiti matričnu jednačinu $XA^7 = X + A^6$ ako je matrica $A = \left[a_{ij} \right]$ formata 2×2 zadana sa $a_{ij} = j - i$

Rješenje:

$$XA^7 = X + A^6$$

$$\Rightarrow XA^7 - X = A^6$$

$$\Rightarrow X(A^7 - I) = A^6$$

$$\Rightarrow X = A^6 \cdot (A^7 - I)^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=(-1)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=-I$$

$$\Rightarrow A^6=A^2\cdot A^2\cdot A^2=-I, A^7=A^6\cdot A=-A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^7-I=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \left(A^7-I\right)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X=-\left(A^7-I\right)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Riješiti matričnu jednačinu: $(A+B)^{-1}AX^{-1}=A^{-1}$, pri čemu su matrice A i B date

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:
Pomnožimo datu matričnu jednačinu s lijeve strane sa $(A+B)$.

$$(A+B)^{-1}AX^{-1}=A^{-1}$$

$$\Rightarrow AX^{-1}=(A+B)A^{-1}$$

Pomnožimo posljednju jednačinu s lijeve strane sa matricom A^{-1}.

$$\Rightarrow AX^{-1}=(A+B)A^{-1}$$

$$\Rightarrow X^{-1}=A^{-1}(A+B)A^{-1}$$

$$\Rightarrow X=\left(A^{-1}(A+B)A^{-1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow X=A(A+B)^{-1}A$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\Rightarrow \det(A+B)=13$$

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{13}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-2 & -7\\ 17 & 1\end{bmatrix}$$

6. Riješiti matričnu jednačinu: $(BX^{-1}A)^{-1}=AB$, pri čemu su matrice A i B zadane $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$(BX^{-1}A)^{-1}=AB$$

$$\Rightarrow A^{-1}XB^{-1}=AB$$

$$\Rightarrow XB^{-1}=A^2B$$

$$\Rightarrow X=A^2B^2$$

$\det A=7\neq 0, \det B=3\neq 0$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 6 & -5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$X=A^2\cdot B^2=\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 6 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & -34\\ -8 & 31\end{bmatrix}$$

7. Odrediti sve matrice X za koje je $XB-A^*=A^7+XA^8$ ako je $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, pri čemu je A^* adjugovana matrica matrice A.

Rješenje:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^2 \cdot A^2 \cdot A^2 \cdot A^2 = I, A^7 = A^6 \cdot A = A$$

$$XB - A^* = A^7 + XA^8$$

$$\Rightarrow XB - A^* = A + X$$

$$\Rightarrow X(B - I) = A + A^*$$

$$\Rightarrow X = (A + A^*)(B - I)^{-1}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\left(B - I\right)^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&-1&-2&1&0\\0&1&-2&3&5\\0&0&1&-3&-5\\0&0&7&-12&-17\\0&0&13&-13&-13\\0&0&2&-4&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-2&1&0\\0&1&-2&3&5\\0&0&1&-3&-5\\0&0&0&9&18\\0&0&0&26&52\\0&0&0&2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&-2&1&0\\0&1&-2&3&5\\0&0&1&-3&-5\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&-1&-2&1&0\\0&1&-2&3&5\\0&0&1&-3&-5\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rangA=4$$

9. Odrediti realne brojeve a i b tako da je

$$rang\begin{bmatrix}1&3&1&-2\\2&6&-3&-4\\a&b&6&-2\end{bmatrix}=2$$

Rješenje:

$$\begin{bmatrix}1&3&1&-2\\2&6&-3&-4\\a&b&6&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&1&-2\\-3&6&2&-4\\6&b&a&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&1&-2\\0&15&5&-10\\0&b-18&a-6&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&3\\0&-10&5&15\\0&10&a-6&b-18\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&1&3\\0&-10&5&15\\0&0&a-1&b-3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a-1=0\wedge b-3=0\Rightarrow a=1\wedge b=3$$

10. Diskutovati rang matrice za razne vrijednosti parametra a:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1&4\\a&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1&4\\a&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\3&1&1&4\\a&4&10&1\\2&2&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&-20&-50&-5\\0&-7a+4&10-17a&1-3a\\2&-12&-30&-3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&4-7a&10-17a&1-3a\\0&4&10&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&4-7a&10-17a&1-3a\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&-7a&-17a&-3a\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{II\cdot 7a+4III}{\sim}\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&2a&-5a\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$a=0\Rightarrow rangA=2$; u suprotnom dijeljenjem treće vrste sa $-a$ dobijamo

$$A\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&2&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rangA=3$$

Dakle imamo da je $rangA=\begin{cases}2; a=0\\3; a\neq 0\end{cases}$.

Zadaci za samostalan rad.

11. Riješi jednačine:

a) $\begin{bmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}9&7&6\\1&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\18&12&9\\23&15&11\end{bmatrix}$ $\left(R: X=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\right)$

b) $\begin{bmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{bmatrix}$ $\left(R: X=\begin{bmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{bmatrix}\right)$

12. Diskutovati rang matrice za razne vrijednosti parametra *a*.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & a & 3 \end{bmatrix}$ $\left(\begin{array}{l} R: rang = 3, \text{ ako je } a \in \{-6, 2\} \\ \quad rang = 4, \text{ inače} \end{array} \right)$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

13. Izračunati $\det X$ ako je $XA = 2X + A^8$ pri čemu je matrica $A = [a_{ij}]$ formata 2×2 zadana sa $a_{ij} = j - i + 1$.

14. Zadane su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Provjeriti da su A i B regularne matrice, te potom riješiti matričnu jednadžbu:

$$AX^{-1}B = (B^T)^{-1}A.$$

15. Riješiti matričnu jednačinu $AX + B = 0$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.3. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Neka su $a_{ij}, b_i \ (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$ realne konstante. Tada je

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1, ..., x_n$.

Ako je $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, sistem (*) zovemo *homogenim*, a u suprotnom kažemo da je taj sistem *nehomogeni*.

2.3.1. METODA DETERMINANTI

Ako je $m = n$ u sistemu (*), taj sistem možemo rješavati metodom determinante. Sa D označimo determinantu sistema čiji su elementi koeficijenti uz nepoznate, tj. $D = \left| a_{ij} \right|$. Sa $D_k \, (k = 1, ..., n)$ označimo determinantu koja se dobije kada k – tu kolonu determinante D zamijenimo elementima $b_1, ..., b_n$. Tada vrijedi sljedeće:

1^0 Ako je $D \neq 0$, tada sistem ima tačno jedno rješenje: $x_k = \dfrac{D_k}{D} \left(k = 1, ..., n \right)$.

2^0 Ako je $D = 0$ i $D_k \neq 0$ za bar jedno $k \in \{1, ..., n\}$, sistem nema rješenja.

3^0 Ako je $D = D_k = 0 \left(k = 1, ..., n \right)$, potrebna su dalja ispitivanja.

ZADACI

1. Riješiti sistem:

$$3x + 4y + 2z = 5$$
$$5x - 6y - 4z = -3$$
$$-4x + 5y + 3z = 1$$

Rješenje:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-18 + 20) - 4(15 - 16) + 2(25 - 24) = 6 + 4 + 2 = 12$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 5(-18 + 20) - 4(-9 + 4) + 2(-15 + 6) = 10 + 20 - 18 = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3(-9+4)-5(15-16)+2(5-12)=-15+5-14=-24$$

$$D_z=\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 5 & -6 & -3\\ -4 & 5 & 1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-6 & -3\\ 5 & 1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}5 & -6\\ -4 & 5\end{vmatrix}$$
$$=3(-6+15)-4(5-12)+5(25-24)=27+28+5=60$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{12}{12}=1$$
$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-24}{12}=-2$$
$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{60}{12}=5$$
$$Rješenje:(1,-2,5)$$

2. Diskutovati rješenje sistema za razne vrijednosti parametra:

$$x+y+z=6$$
$$ax+4y+z=5$$
$$6x+(a+2)y+2z=13$$

Rješenje:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 4 & 1\\ 6 & a+2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 4-a & 1-a\\ 6 & a-4 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-a & 1-a\\ a-4 & -4\end{vmatrix}=-4(4-a)-(a-4)(1-a)$$
$$=4(a-4)-(a-4)(1-a)=(a-4)(4-1+a)=(a-4)(3+a)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 13 & a+2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & a & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & a\end{vmatrix}=-a-3=-(a+3)$$
$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 6 & 1\\ a & 5 & 1\\ 6 & 13 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 6 & 1\\ a-1 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=a-1+4=a+3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ a & 4 & 5 \\ 6 & a+2 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 4-a & 5-6a \\ 6 & a-4 & -23 \end{vmatrix} = -92 + 23a - 5a + 20 + 6a^2 - 24a$$

$$= 6a^2 - 6a - 72 = 6(a-4)(a+3)$$

I Ako je determinanta sistema različita od 0 onda je sistem saglasan i određen, tj. ima tačno jedno rješenje. U našem zadatku determinanta sistema će biti različita od nule ako je $a \neq 4$ i ako je $a \neq -3$. Naime, $D = (a-4)(3+a) \neq 0 \Rightarrow a \neq 4, a \neq -3$. Dakle, za $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$ naš sistem jednačina ima jedno rješenje i to rješenje iznosi:

$$x = \frac{-(a+3)}{(a-4)(a+3)} = \frac{-1}{a-4} = \frac{1}{4-a}$$

$$y = \frac{(a+3)}{(a-4)(a+3)} = \frac{1}{a-4}$$

$$z = \frac{6(a-4)(a+3)}{(a-4)(a+3)} = 6$$

II Ako je barem jedna od determinanti D_x, D_y, D_z različita od nule i $D = 0$, onda sistem nema rješenja.U našem zadatku za $a = 4$ imamo taj slučaj.

$a = 4 \Rightarrow D = 0, D_x = -7, D_y = 7, D_z = 0$, pa je sistem nemoguć.

III Ako je $D = D_x = D_y = D_z = 0$ onda mogu nastupiti dva slučaja: da sistem ima beskonačno rješenja ili da nema nijedno rješenje. Da bi zaključili da li je sistem neodređen, odnosno nesaglasan moramo vršiti dodatna ispitivanja.

U našem zadatku za $a = -3$ imamo da su sve pomenute determinante jednake nuli, tj. $a = -3 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$. Iz narednih razmatranja vidjećemo da je naš sistem neodređen ukoliko je $a = -3$. Uvrstimo $a = -3$ u dati sistem jednačina. Dobićemo:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -3x + 4y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 6 - z \\ -3x + 4y &= 5 - z \end{aligned}\right\}$$
$$-6x - y + 2z = 13$$

Riješimo sistem od prve dvije jednčine po x i y.

$$\underline{\begin{aligned} x+y&=6-z\\ -3x+4y&=5-z \end{aligned}}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=4+3=7$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}6-z & 1\\ 5-z & 4\end{vmatrix}=4(6-z)-(5-z)=19-3z$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 6-z\\ -3 & 5-z\end{vmatrix}=5-z+3(6-z)=23-4z$$

$$Rješenje:\left(\frac{19-3z}{7},\frac{23-4z}{7},z\right),z\in R$$

Provjerimo da li ovo rješenje zadovoljava treću jednačinu:

$$6\cdot\frac{19-3z}{7}-\frac{23-4z}{7}+2z=13$$

$$\Rightarrow 114-18z-23+4z+14z=91$$

$$\Rightarrow 0\cdot z=0$$

Posljednja jednakost vrijedi za $\forall z\in\mathbb{R}$, pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja, ako je $a=-3$.

3. Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti parametara:

$$\begin{aligned} ax+4y+z&=0\\ 2y-3z&=1\\ 2x\qquad -bz&=-2 \end{aligned}$$

Rješenje:

$$D=\begin{vmatrix}a & 4 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 7\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -b\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}a & 7\\ 2 & -b\end{vmatrix}=2(-ab-14)=-2(ab+14)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 0 & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & -6-b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & -6-b\end{vmatrix}=24+4b+4=28+4b=4(7+b)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & -2 & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & 0 & -6-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 1\\ 2 & -6-b\end{vmatrix}=-6a-ab-2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4a-8) = -4(a-2)$$

I $\quad ab \neq -14 \quad$ sistem je saglasan (ima tačno jedno rješenje).

$$x = \frac{-2(b+7)}{ab+14},\ y = \frac{6a+ab+2}{2(ab+14)},\ z = \frac{2(a-2)}{ab+14}.$$

II $\quad ab = 14$

$$D_x = 0 \Rightarrow b+7=0 \Rightarrow b=-7 \Rightarrow a=2$$
$$D_y = 0 \Rightarrow -ab-6a-2=0 \Rightarrow 14-6a-2=0 \Rightarrow 6a=12 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-7$$
$$D_z = 0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-7$$

II.1. $a=2, b=-7 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ Pokazaćemo da je u ovom slučaju sistem neodređen, tj. ima beskonačno rješenja. Uvrstimo $a=2$ i $b=-7$ u dati sistem jednačina:

$$(*)\quad \begin{aligned} 2x+4y+z&=0 \\ 2y-3z&=1 \\ 2x+7z&=-2 \end{aligned} \quad \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa brojem dva, a zatim je saberemo sa trećom jednačinom dobićemo prvu jednačinu, dakle sistem (*) se svodi na sistem od dvije jednačine.

Izeberimo jednu subdeterminantu različitu od nule:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

pa uzimajući $z \in \mathbb{R}$ proizvoljno imamo:

$$2y = 1+3z$$
$$2x = -2-7z$$
$$x = \frac{-2-7z}{2},\ y = \frac{1+3z}{2}$$

Uređene trojke $\left(\frac{-2-7z}{2}, \frac{1+3z}{2}, z\right), z \in \mathbb{R}$ su rješenja sistema.

II.2. $a \neq 2$ ili $b \neq -7 \Rightarrow D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$ - sistem je nemoguć.

4. Odrediti parametar α tako da sistem jednačina:

$$3x + \alpha y = 5$$
$$x + y = 2$$
$$\alpha x + 2y = 4$$

ima rješenje, pa naći to rješenje.

Rješenje: Naći ćemo rješenje sistema koji se sastoji od prve dvije jednačine datog sistema, zatim ćemo to rješenje uvrstiti u treću jednačinu datog sistema i vidjeti za koje vrijednosti α nađeno rješenje je rješenje datog sistema.

$$3x + \alpha y = 5$$
$$\underline{x + y = 2}$$
$$3x + \alpha y = 5$$
$$\underline{-3x - 3y = -6}$$
$$(\alpha - 3)y = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{\alpha - 3}$$
$$x = 2 - y = 2 + \frac{1}{\alpha - 3} = \frac{2\alpha - 5}{\alpha - 3}$$

Uvrstimo nađeno rješenje u treću jednačinu datog sistema:

$$\alpha x + 2y = 4$$
$$\alpha \cdot \frac{2\alpha - 5}{\alpha - 3} - \frac{2}{\alpha - 3} = 4$$
$$2\alpha^2 - 5\alpha - 2 = 4\alpha - 12$$
$$2\alpha^2 - 9\alpha + 10 = 0$$
$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{5}{2}$$

Dobili smo da dati sistem jednačina ima rješenje ako je $\alpha = 2$ ili $\alpha = \frac{5}{2}$.

5. Riješiti sistem:

$$x - y + z = 2$$
$$x - y - 2z = -1$$

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ x-y-2z=-1 \end{array}\right\} - \Rightarrow -3z=-3 \Rightarrow z=1$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+1=2 \\ x-y-2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x-y=1 \\ x=y+1 \end{array}$$

Prema tome, uređene trojke $(y+1, y, 1)$ $(y \in \mathbb{R})$ su rješenja datog sistema.

2.3.2. GAUSSOVA METODA RJEŠAVANJA SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Ako je u (*) $m \neq n$, možemo koristiti Gaussovu metodu. Uvedimo sljedeće matrice: $A=\left[a_{ij}\right]$ - matrica sistema i $A/B=\left[a_{ij} \mid b_i\right]$ - proširena matrica.
Tada sistem ima rješenja ako te dvije matrice imaju isti rang. Pri tome, sistem ima tačno jedno rješenje ako je $rang\, A$ jednak broju nepoznatih, a ima beskonačno mnogo rješenja ako je $rang\, A = rang\, A/B$ manje od broja nepoznatih. U posljednjem slučaju razlika između broja nepoznatih i $rang\, A$ predstavlja broj nepoznatih koje treba uzeti proizvoljno.

ZADACI

1. Riješiti sistem jednačina:

$$\begin{array}{l} 2x+4y-5z=-5 \\ -x-y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{array}$$

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, [A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$[A/B]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2&4&-5&-5\\0&2&-3&-5\\0&-3&4&6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2&4&-5&-5\\0&1&\frac{-3}{2}&\frac{-5}{2}\\0&-3&4&6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2&4&-5&-5\\0&1&\frac{-3}{2}&\frac{-5}{2}\\0&0&\frac{-1}{2}&\frac{-3}{2}\end{array}\right]$$

$$rangA=3$$

$$rang(A/B)=3$$

$$\begin{aligned}2x+4y-5z&=-5\\ y-\frac{3}{2}z&=\frac{-5}{2}\\ -\frac{1}{2}z&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$x=1,y=2,z=3$$

2. Riješiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+x_3+2x_4&=1\\5x_1-x_2+3x_3-x_4&=3\\2x_1+x_2+2x_3-3x_4&=4\end{aligned}$$

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&1&2\\5&-1&3&-1\\2&1&2&-3\end{bmatrix},[A/B]=\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&1&2&1\\5&-1&3&-1&3\\2&1&2&-3&4\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&1&2&1\\5&-1&3&-1&3\\2&1&2&-3&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&1&2&1\\0&-7&-4&13&-4\\0&-7&-4&13&-10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&1&2&1\\0&-7&-4&13&-4\\0&0&0&0&-6\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+x_3+2x_4&=1\\-7x_2-4x_3+13x_4&=-4\\0&=-6\end{aligned}$$

Sistem nema rješenja: rang$A$=2; rang(A/B)=3.

3. Riješiti sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1\\
&x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2\\
&x_1 - x_2 + x_3 = -1\\
&3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -6
\end{aligned}
$$

Rješenje:

$$
[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 1\\ 1 & -5 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2\\ 2 & -4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 6 & -5 & -3\\ 0 & 4 & -2 & -3\\ 0 & 20 & -14 & -12 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 6 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 8 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 6 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

rang$A$=rang(A/B)=3

$$4x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = -\frac{3}{4}$$

$$-6x_2 - 5x_3 = -3 \Rightarrow -6x_2 = 5x_3 - 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{8}$$

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 5x_2 - 3x_3 + 2 = -\frac{11}{8}$$

$$R: \left(-\frac{11}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{3}{4}\right)$$

4. Riješiti sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\\
&2x_1 + 3x_2 \qquad -5x_4 = 0\\
&5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 6
\end{aligned}
$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & -6 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -19 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -19 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -3x_3 - 16x_4 &= -19 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$rang(A) = rang(A/B) = 3 < 4 \Rightarrow$ sistem je neodređen

$$-3x_3 = 16x_4 - 19 \Rightarrow x_3 = \frac{-16x_4 + 19}{3}$$

$$2x_2 - x_3 = 3 - 2x_4 \Rightarrow 2x_2 = x_3 + 3 - 2x_4 = \frac{19 - 16x_4 + 9 - 6x_4}{3} = \frac{28 - 22x_4}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{14 - 11x_4}{3}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 + x_4 \Rightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 + 1 = \frac{24x_4 - 21}{3} = 8x_4 - 7$$

5. Za koje vrijednosti parametra a sistem

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 2 \\ x + y + az &= -3 \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje? Odrediti to rješenje!

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -3 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -3 \\ 0 & a-1 & 1-a & 5 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+3a \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -3 \\ 0 & a-1 & 1-a & 5 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 3(a+2) \end{array}\right]$$

1) $(1-a)(a+2)\neq 0 \Rightarrow a\neq 1, a\neq -2$. Tada je $\text{rang}A=\text{rang}\ A/B=3$ (broj nepoznatih u sistemu), pa je sistem određen.

$$(1-a)(a+2)z=3a+6 \Rightarrow z=\frac{3(a+2)}{(1-a)(a+2)}=\frac{3}{1-a}$$

$$(a-1)y+(1-a)\frac{3}{(1-a)}=5 \Rightarrow y=\frac{2}{(a-1)}$$

$$x+y+az=-3 \Rightarrow x+\frac{2}{a-1}+a\frac{3}{1-a}=-3 \Rightarrow x=\frac{-3(1-a)+2-3a}{1-a} \Rightarrow x=\frac{1}{a-1}$$

2) Za $a=1$, $\text{rang}A=1, \text{rang}\ A/B=2$, pa sistem nema rješenja.

3) Za $a=-2$, $\text{rang}A=\text{rang}\ A/B=2<3$ (broj nepoznatih u sistemu), sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

$$-3y+2z=5 \Rightarrow y=\frac{2z-5}{3}$$

$$x+y-2z=-3 \Rightarrow x=-3-y+2z=-3-\frac{2z-5}{3}+2z=\frac{-9-2z+5+6z}{3}=\frac{4z-4}{3}$$

Rješenja sistema su: $\left(\frac{4z-4}{3},\frac{2z-5}{3},z\right), z\in\mathbb{R}$.

6. Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

a) $\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 7x-5y=-3 \end{array}$ (R:(1,2))

b) $\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 4x+6y=10 \end{array}$ (nema rješenja)

c) $\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 4x+6y=16 \end{array}$ (neodređen)

d) $\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}$ (nema rješenja)

e)
$$\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3-4x_4=11 \\ 2x_1+x_2+5x_3+x_4=3 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-1 \\ x_1+x_2+5x_3+x_4=5 \end{array} \qquad \left(R:\left(2,\frac{247}{21},-\frac{9}{7},\frac{5}{3}\right)\right)$$

7. Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti parametara:

$$\begin{aligned} x+y+z&=\lambda \\ x+(1+\lambda)y+z&=2\lambda \\ x+y+(1+z)\lambda&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ax+y-z&=1 \\ x+ay-z&=1 \\ x-y-az&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ax+y+z&=4 \\ x+cy+z&=3 \\ x+2cy+z&=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z+t&=1 \\ x+\lambda y+z+t&=\lambda \\ x+y+\lambda z+t&=\lambda^2 \\ x+y+z+\lambda t&=\lambda^3 \end{aligned}$$

8. Odrediti parametar tako da sistem ima rješenje, pa naći to rješenje

$$\begin{aligned} 4x+y&=5 \\ 3x+2y&=5 \\ 6x+2y+2\lambda&=\lambda^2 \end{aligned}$$

Rez.: $\lambda_1=4, \lambda_2=-2, x=y=1$.

9. Riješiti sistem:

$$\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4&=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4&=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4&=2 \end{aligned}$$

Rez.: Sistem ima beskonačno mnogo rješenja,
$x_1=8+9a-4b, x_2=a, x_3=b, x_4=-25a+5b-10$, $a,b\in R.$

10. Ispitati u pogledu rješivosti sisteme:

a)

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4&=4 \\ 2x_1+3x_2-5x_4&=0 \\ 5x_1+2x_2+5x_3-6x_4&=0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4&=4 \\ 2x_1+3x_2-5x_4&=0 \\ 5x_1+2x_2+5x_3-6x_4&=6 \end{aligned}$$

Rez. a) nema rješenja
b) beskonačno mnogo rješenja

$$x_1=8a-7, x_2=\frac{14-11a}{3}, x_3=\frac{19-16a}{3}, x_4=a, a\in R.$$

2.3.3. HOMOGENI SISTEMI

Neka su $a_{ij}\left(i=1,...,n;\ j=1,...,n\right)$ realne konstante. Tada homogeni sistem jednačina

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenje $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\left(0,0,...,0\right)$ ako je determinanta D tog sistema broj različit od 0. Ako je pak $D=0,$ sistem (*) ima beskonačno mnogo rješenja.

ZADACI

1. Riješiti sistem jednačina:

$$x+2y+z+t=0$$
$$2x+y+z+2t=0$$
$$x+2y+2z+t=0$$
$$x+y+z+t=0$$

Rješenje:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&2\\1&2&2&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&-1&-1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=0$$

Tražimo jednu subdeterminantu glavne determinante različitu od nule

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\-1&-2&0\end{vmatrix}=-2-1=-3$$

$$x+2y+z=-t$$
$$2x+y+z=-2t$$
$$\underline{x+2y+2z=-t}$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-t & 2 & 1\\ -2t & 1 & 1\\ -t & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-t & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=3t\Rightarrow x=\frac{-3t}{-3}=t$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & -t & 1\\ 2 & -2t & 1\\ 1 & -t & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow y=\frac{0}{-3}=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & -t\\ 2 & 1 & -2t\\ 1 & 1 & -t\end{vmatrix}=0\Rightarrow z=\frac{0}{-3}=0$$

rješenje: $x=-t, y=0, z=0 (t\in R)$

2. Odrediti parametar k tako da sistem ima netrivijalna rješenja, pa naći ta rješenja:

$$x_1+2x_2+x_3=0$$
$$x_1 \qquad -x_3=0$$
$$kx_1-x_2 \qquad =0$$

Rješenje:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ k & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ k & -1 & 0\end{vmatrix}=-2-2k=-2(k+1)$$

$$D=0\Leftrightarrow k=-1$$

Sistem glasi:

$$x_1+2x_2+x_3=0$$
$$x_1 \qquad -x_3=0 \qquad\qquad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$
$$-x_1-x_2 \qquad =0$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 = -x_3 \\
&x_1 = x_3 \\
&\underline{-x_1 - x_2 = 0} \\
&x_3 + 2x_2 = x_3 \\
&2x_2 = -2x_3 \\
&\underline{x_2 = -x_3} \\
&Rje\check{s}enje: x_1 = x_3, x_2 = -x_3, x_3 = x_3 \\
&(a, -a, a), a \in R
\end{aligned}
$$

3. Odrediti parametar k tako da sistem ima netrivijalna rješenja, pa naći ta rješenja

$$
\begin{aligned}
&x + y + z = 0 \\
&kx + 4y + z = 0 \\
&\underline{6x + (k+2)y + 2z = 0}
\end{aligned}
$$

Rješenje: Homogeni sistem ima beskonačno mnogo rješenja (tj. ima netrivijalna rješenja) ako je determinanta sistema jednaka nuli.

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 1 \\ 6 & k+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 4-k & 1-k \\ 6 & k-4 & -4 \end{vmatrix} = -4(4-k) - (k-4)(1-k) = (k-4)(k+3)
$$

$$
D = 0 \Leftrightarrow \left(k = 4 \vee k = -3\right)
$$

1) Za $k = 4$ sistem glasi:

$$
\begin{aligned}
&x + y + z = 0 \\
&4x + 4y + z = 0 \\
&\underline{6x + 6y + 2z = 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0
$$

$$\frac{\begin{array}{l} y+z=-x \\ 4y+z=-4x \end{array}}{}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -4x & 1 \end{vmatrix}=3x$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -x \\ 4 & -4x \end{vmatrix}=0$$

$y=-x, z=0$

$R:(x,-x,0)$

2) Za $k=-3$ sistem glasi:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -3x+4y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=-z \ \big/ \cdot 3; \cdot(-4) \\ -3x+4y=-z \end{array}\right\} + \Rightarrow y=\frac{-4}{7}z, x=\frac{-3}{7}z$$

$6x-y+2z=0$

S obzirom da smo već konstatovali da sistem ima beskonačno rješenja, nije potrebno provjeravati da li dobivena rješenja zadovoljavaju treću jednačinu.

Dakle rješenja su $\left(\frac{-3}{7}z, \frac{-4}{7}z, z\right), z \in \mathbb{R}$.

4. Odrediti parametar k tako da sistem ima netrivijalna rješenja, pa naći ta rješenja.

$$\begin{array}{l} kx_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+kx_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+kx_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+kx_4=0 \end{array}$$

(R: Za k =1 ili k = -3 sistem ima netrivijalna rješenja)