**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa A**

1. Prvi harmonik prirodnih frekvencija konzole s kontinuiranim opterećenjem je u vezi s rješenjima $\beta$ jednačine

   $$f(\beta) = \cosh\beta\cos\beta + 1 = 0$$

   pri čemu je $\beta^4 = (2\pi f)^2 \dfrac{mL^3}{EI}$, $f$ frekvencija, $m$ masa grede ($m = \rho AL$, $A = bh$), $L = 1$ m dužina grede, $E = 200$ GPa modul elastičnosti, $I$ moment intercije poprečnog presjeka grede ($I = bh^3/12$), širina grede $b = 25$ mm, visina grede $h = 2.5$mm, specifična gustina $\rho = 7850$kg/m$^3$.

   Zadatak riješiti koristeći metodu bisekcije, ako se zna da je $\beta < 4$. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude 0.01 ili broj iteracija jednak 5.

   (25%)

2. Pomjeranja sistema dobivaju se na osnovu sljedećeg sistema jednačina ravnoteže za mase/težine:

   $$\begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3+k_5 & -k_3 & -k_5 \\ -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ -k_5 & -k_4 & k_4+k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

   Dati sistem jednačina riješiti koristeći *Jacobijevu*, s tačnošću 0.1 ili kad maksimalan broj iteracija bude 4.

   Uzeti da je: $k_1 = 5k_2 = 2k_3 = k_4 = 2k_5 = 10$ N/m, $G_1 = 2G_2 = G_3 = 1$ N.

   (25%)

3. Funkcija greške, `erf`, data je jednačinom:

   $$\texttt{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$$

   Koristeći trapezno pravilo izračunati vrijednost funkcije greške za $a = 0.7$ koristeći 3 jednaka intervala.

   (25%)

4. Jednačina pražnjenja bazena kroz odvodnu cijev može se prikazati sljedećom diferencijalnom jednačinom:

   $$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4A(h)}\sqrt{2g(h+e)}$$

   gdje je $h$ dubina bazena u m, $t$ vrijeme istjecanja u s, $d$ prečnik odvodne cijevi u m, $A(h) = 0.2h$ površina bazena zavisna od dubine u m$^2$, $g = 9.81$ m$^2$/s gravitaciono ubrzanje i $e$ dubina uranjanja odvodne cijevi ispod dna bazena u m. Koristeći *Eulerovu* modifikovanu metodu, naći dubinu jezera nakon 5 s. Podaci: $h(0) = 6$ m, $d = 0.25$ m, $e = 1$ m, vremenski korak $\Delta t = 1$ s.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa B**

1. Prvi harmonik prirodnih frekvencija konzole s kontinuiranim opterećenjem je u vezi s rješenjima $\beta$ jednačine

   $$f(\beta) = \cosh\beta\cos\beta + 1 = 0$$

   pri čemu je $\beta^4 = (2\pi f)^2 \dfrac{mL^3}{EI}$, $f$ frekvencija, $m$ masa grede ($m = \rho AL$, $A = bh$), $L = 1$ m dužina grede, $E = 100$ GPa modul elastičnosti, $I$ moment intercije poprečnog presjeka grede ($I = bh^3/12$), širina grede $b = 35$ mm, visina grede $h = 3.5$mm, specifična gustina $\rho = 2750\text{kg/m}^3$.

   Zadatak riješiti koristeći metodu regula falsi, ako se zna da je $\beta < 3$. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude 0.01 ili broj iteracija jednak 5.

   (25%)

2. Pomjeranja sistema dobivaju se na osnovu sljedećeg sistema jednačina ravnoteže za mase/težine:

   $$\begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3+k_5 & -k_3 & -k_5 \\ -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ -k_5 & -k_4 & k_4+k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

   Dati sistem jednačina riješiti koristeći $Gauss-Seidelovu$, s tačnošću 0.1 ili kad maksimalan broj iteracija bude 4.

   Uzeti da je: $2k_1 = 5k_2 = 2k_3 = k_4 = k_5 = 10$ N/m, $G_1 = G_2 = G_3 = 1$ N.

   (25%)

3. Funkcija greške, `erf`, data je jednačinom:

   $$\texttt{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$$

   Koristeći *Simpsonovo* 1/3 pravilo izračunati vrijednost funkcije greške za $a = 0.2$ koristeći tri jednaka intervala.

   (25%)

4. Jednačina pražnjenja bazena kroz odvodnu cijev može se prikazati sljedećom diferencijalnom jednačinom:

   $$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4A(h)}\sqrt{2g(h+e)}$$

   gdje je $h$ dubina bazena u m, $t$ vrijeme istjecanja u s, $d$ prečnik odvodne cijevi u m, $A(h) = 0.3h$ površina bazena zavisna od dubine u $\text{m}^2$, $g = 9.81\ \text{m}^2/\text{s}$ gravitaciono ubrzanje i $e$ dubina uranjanja odvodne cijevi ispod dna bazena u m. Koristeći *Eulerovu* eksplicitnu metodu, naći dubinu i površinu jezera nakon 5 s. Podaci: $h(0) = 3$ m, $d = 0.1$ m, $e = 1$ m, vremenski korak $\Delta t = 1$ s.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa C**

1. Relacija disperzije vodenih talasa usljed djelovanja gravitacije data je jednačinom:

   $$k \cdot g \cdot \operatorname{tgh}(k \cdot h) = 4\pi^2 f^2$$

   gdje je $g$ gravitaciono ubrzanje ($g = 9.81$ m/s), $h$ dubina vode (u m), a $f$ kružna frekvencija talasa (u Hz). Treba naći talasni broj $k$ za koji je frekvencija jednaka $f = 0.2$ Hz u dubini vode od $h = 5$ m. Zadatak riješiti koristeći metodu regula falsi, ako se zna da je $k < 1$. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude 0.01 ili broj iteracija jednak 5.

   (25%)

2. Sljedeći sistem jednačina određuje koncentracije u nizu reaktora kao funkcije masenog unosa za svaki reaktor:

   $$\begin{bmatrix} 15 & -3 & -1 \\ -3 & 18 & -6 \\ -4 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3800 \\ 1200 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

   Dati sistem jednačina riješiti koristeći $Gauss - Seidelovu$ metodu, s tačnošću 0.1 ili kad maksimalan broj iteracija bude 4.

   (25%)

3. Sila koja djeluje na jarbol broda može se predstaviti sljedećom funkcijom:

   $$F(z) = \int_0^H 200 \left( \frac{z}{z+5} \right) e^{-2z/H} dz$$

   gdje je $z$ visina iznad palube, a $H$ visina jarbola. Koristeći *Simpsonovo* $1/3$ pravilo izračunati vrijednost sile za $H = 30$ m koristeći tri jednaka intervala.

   (25%)

4. Rast populacije neke biološke vrste se često modelira običnom diferencijalnom jednačinom oblika:

   $$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \qquad N(0) = N_0$$

   gdje je $N$ populacija, $aN$ predstavlja natalitet, a $bN^2$ mortalitet usljed svih uzroka (bolest, borba za hranu, …). Ako je $N_0 = 100$, $a = 0.2$, i $b = 0.001$, izračunati $N(t)$ za period od 0 do 10 godina, s korakom od 2 godine, koristeći *Eulerovu* eksplicitnu metodu.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa D**

1. Relacija disperzije vodenih talasa usljed djelovanja gravitacije data je jednačinom:

   $$k \cdot g \cdot \mathrm{tgh}(k \cdot h) = 4\pi^2 f^2$$

   gdje je $g$ gravitaciono ubrzanje ($g = 9.81$ m/s), $h$ dubina vode (u m), a $f$ kružna frekvencija talasa (u Hz). Treba naći talasni broj $k$ za koji je frekvencija jednaka $f = 0.25$ Hz u dubini vode od $h = 4$ m. Zadatak riješiti koristeći metodu bisekcije, ako se zna da je $k < 1$. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude 0.01 ili broj iteracija jednak 5.

   (25%)

2. Sljedeći sistem jednačina određuje koncentracije u nizu reaktora kao funkcije masenog unosa za svaki reaktor:

   $$\begin{bmatrix} 15 & -3 & -1 \\ -3 & 18 & -6 \\ -4 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3800 \\ 1200 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

   Dati sistem jednačina riješiti koristeći *Jacobijevu* metodu, s tačnošću 0.1 ili kad maksimalan broj iteracija bude 4.

   (25%)

3. Sila koja djeluje na jarbol broda može se predstaviti sljedećom funkcijom:

   $$F(z) = \int_0^H 200 \left( \frac{z}{z+5} \right) e^{-2z/H} dz$$

   gdje je $z$ visina iznad palube, a $H$ visina jarbola. Koristeći trapezno pravilo izračunati vrijednost sile za $H = 24$ m koristeći 3 jednaka intervala.

   (25%)

4. Rast populacije neke biološke vrste se često modelira običnom diferencijalnom jednačinom oblika:

   $$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \qquad N(0) = N_0$$

   gdje je $N$ populacija, $aN$ predstavlja natalitet, a $bN^2$ mortalitet usljed svih uzroka (bolest, borba za hranu, ...). Ako je $N_0 = 50$, $a = 0.2$, i $b = 0.001$, izračunati $N(t)$ za period od 0 do 25 godina, s korakom od 5 godina, koristeći *Eulerovu* modificiranu metodu.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa A**

1. Riješiti jednačinu

$$\cos(x/5) - \ln(x/5) = 0 \tag{1}$$

koristeći *Newtonovu* metodu. Kao početnu aproksimaciju uzeti mjesec rođenja. Zadatak uraditi s tačnošću $10^{-6}$ ili kada broj iteracija bude jednak 5.

(20%)

2. Brzinomjer u tijelu rakete zabilježio je podatke o promjeni njene brzine $v$ u vremenu $t$ - podaci su dati u tabeli 1.

Tabela 1

| $t$, s | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$,m/s | 60 | 130 | 200 | 300 | 420 | 550 | 700 |

Potrebno je uraditi sljedeće:

a) Izračunati pređeni put od 2. do 14. sekunde koristeći *Simpsonovo* 1/3 pravilo. Koristiti sve podatke.

(20%)

b) Koristeći metodu najmanjih kvadrata odrediti aproksimacionu funkciju brzine rakete oblika

$$\phi(x) = ax^b$$

(20%)

c) Koristeći direktnu metodu, naći interpolacioni polinom drugog reda i vrijednost brzine u vremenu $t = 6.5$ s.

(20%)

3. Ravnoteža mase zagađivača u dobro izmješanom jezeru može se napisati kao

$$V\frac{dc}{dt} = W - Qc - kV\sqrt{c}$$

gdje je $V = 10^6$ m$^3$, $Q = 10^5$ m$^3$/godina, $W = 10^6$ g/godina, $c_0 = 4$ g/m$^3$ (za $t = 0$) i $k = 0.25$ m$^{0.5}$/g$^{0.5}$/godina. Koristeći *Eulerovu* eksplicitnu metodu izračunaj vrijednost $c$ u prvih pet godina s korakom od jedne godine.

(20%)

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa B**

1. Zapremina tečnosti $V$ u elipsoidnom rezervoaru može se dobiti na osnovu dubine tečnosti $h$ pomoću izraza:

$$V = \frac{\pi abh^2}{3c^2}(3c - h)$$

Koristeći metodu sekante naći dubinu $h$. Podaci: $V = \pi$ m$^3$, $a = 3$ m, $b = 2$ m, $c = 1$ m. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude $10^{-6}$ ili kada maksimalan broj iteracija bude 5.
**Napomena:** Dubina $h$ je u pravcu poluose $c$, tj. vrijedi $0 < h < 2c$, pa kao početne aproksimacije koristiti fizikalno moguće vrijednosti.

(20%)

2. Brzinomjer u tijelu rakete zabilježio je podatke o promjeni njene brzine $v$ u vremenu $t$ - podaci su dati u tabeli 1.

Tabela 1

| $t$, s | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$,m/s | 60 | 130 | 200 | 300 | 420 | 550 |

Potrebno je uraditi sljedeće:

a) Izračunati pređeni put od 2. do 12. sekunde koristeći pravilo trapeza. Koristiti sve podatke.

(20%)

b) Koristeći metodu najmanjih kvadrata odrediti aproksimacionu funkciju brzine rakete oblika

$$\phi(x) = ae^x$$

(20%)

c) Koristeći *Lagrangeovu* metodu, naći interpolacioni polinom drugog reda i vrijednost brzine u vremenu $t = 9.1$ s.

(20%)

3. Voda istječe iz rezervoara koničnog oblika s kružnim ulivom prema izrazu

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2\sqrt{2g}\frac{\sqrt{x}}{A(x)}$$

gdje je $r$ poluprečnik ulivnog dijela, $x$ nivo vode u odnosu na vrh konusa, a $A(x) = 0.3x^2\pi$ površina poprečnog presjeka konusa na daljini $x$ od vrha. Koristeći modifikovanu metodu srednje vrijednosti odrediti nivo vode nakon 300 s koristeći 5 podjela.

Podaci: $r = 0.03$ m, $g = 9.81$ m/s$^2$, $h_0 = 2.5$ m.

(20%)

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

## Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa A

1. Plovak u obliku sfere radijusa $r$, izrađen od materijala specifične gustoće $\rho_p$, pluta u tečnosti specifične gustoće $\rho_t$. Izračunati do koje dubine će plovak potonuti, ako je $\rho_p/\rho_t = k = 0.2$ i $r = 10$ cm.

   Zadatak se svodi na rješavanje nelinearne jednačine:

   $$x^3 - 3rx^2 + 4kr^3 = 0$$

   gdje je $x$ tražena dubina. Zadatak riješiti *Newtonovom* metodom. Kao početnu aproksimaciju uzeti vrijednost poluprečnika. Računanje zaustaviti kada je razlika dvije uzastopne iteracije manja od 0.01 ili broj iteracija 5.

   (25%)

2. Tabela 1 daje zavisnost specifične toplote zraka pri konstantnom pritisku od temperature, $T$. Koristeći direktnu metodu, naći vrijednost $C_p(1540)$ koristeći tri tačke. Rezultat provjeriti Lagrangeovom metodom, koristeći iste podatke.

Tabela 1

| $T$, K | $C_p$,kJ/kgK | $T$, K | $C_p$,kJ/kgK |
|---|---|---|---|
| 1000 | 1.1410 | 1400 | 1.1982 |
| 1100 | 1.1573 | 1500 | 1.2095 |
| 1200 | 1.1722 | 1600 | 1.2197 |
| 1300 | 1.1858 | | |

(25%)

3. Koristeći *Gaussove* kvadraturne formule ($n = 2$) izračunati vrijednost integrala

   $$I = \int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}$$

   Pri tome koristiti tri jednaka intervala.

   (25%)

4. Tijelo mase $m$ s početnom temperaturom $T_0$ se hladi konvekcijom na temperaturu okoline $T_a$. Problem se svodi na rješavanje sljedeće diferencijalne jednačine:

   $$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{mc_p}(T - T_a) \qquad T(0) = T_0$$

   gdje je $h$ koeficijent hlađenja konvekcijom, $A$ površina tijela mase $m$ i $c_p$ specifična toplota. Koristeći *Eulerovu* ekslicitnu metodu za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačina s početnim vrijednostima, riješiti $T(t)$ za vrijeme od 0 do 25 sekundi, s korakom od 5 sekundu. Podaci: $A = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m$^2$, $m = 25 \cdot 10^{-3}$ kg, $c_p = 900$ J/kg K, $h = 450$ W/m$^2$K, $T(0) = 400$ °C, $T_a = 40$ °C.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa B**

1. Plovak u obliku sfere radijusa $r$, izrađen od materijala specifične gustoće $\rho_p$, pluta u tečnosti specifične gustoće $\rho_t$. Izračunati do koje dubine će plovak potonuti, ako je $\rho_p/\rho_t = k = 0.2$ i $r = 10$ cm.

   Zadatak se svodi na rješavanje nelinearne jednačine:

   $$x^3 - 3rx^2 + 4kr^3 = 0$$

   gdje je $x$ tražena dubina. Zadatak riješiti metodom sekante. Kao početne aproksimacije uzeti vrijednosti unutar dimenzija sfere. Računanje zaustaviti kada je razlika dvije uzastopne iteracije manja od 0.01 ili broj iteracija 5.

   (25%)

2. Tabela 1 daje zavisnost specifične toplote zraka pri konstantnom pritisku od temperature, $T$. Koristeći direktnu metodu, naći vrijednost $C_p(1125)$ koristeći tri tačke. Rezultat provjeriti Lagrangeovom metodom, koristeći iste podatke.

Tabela 1

| $T$, K | $C_p$,kJ/kgK | $T$, K | $C_p$,kJ/kgK |
|---|---|---|---|
| 1000 | 1.1410 | 1400 | 1.1982 |
| 1100 | 1.1573 | 1500 | 1.2095 |
| 1200 | 1.1722 | 1600 | 1.2197 |
| 1300 | 1.1858 | | |

(25%)

3. Koristeći *Simpsonovo* pravilo izračunati vrijednost integrala

   $$I = \int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

   Pri tome koristiti tri jednaka intervala.

   (25%)

4. Tijelo mase $m$ s početnom temperaturom $T_0$ se hladi konvekcijom na temperaturu okoline $T_a$. Problem se svodi na rješavanje sljedeće diferencijalne jednačine:

   $$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{mc_p}(T - T_a) \qquad T(0) = T_0$$

   gdje je $h$ koeficijent hlađenja konvekcijom, $A$ površina tijela mase $m$ i $c_p$ specifična toplota. Koristeći *Eulerovu* implicitnu metodu za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačina s početnim vrijednostima, riješiti $T(t)$ za vrijeme od 0 do 50 sekundi, s korakom od 10 sekundu. Podaci: $A = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m$^2$, $m = 25 \cdot 10^{-3}$ kg, $c_p = 900$ J/kg K, $h = 450$ W/m$^2$K, $T(0) = 400$ °C, $T_a = 40$ °C.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa B**

1. Lijek dat pacijentu ima koncentraciju u krvotoku datu jednačinom

$$c(t) = Ate^{-t/3}$$

u mg/ml, pri čemu je $t$ vrijeme u satima nakon što je pacijent uzeo $A$ jedinica lijeka. Nakon što je pacijent uzeo $e/3$ jedinica lijeka, izmjerena je koncentracija lijeka u krvotoku od 0.5 mg/ml. Koristeći metodu regula falsi odrediti vrijeme kada je pacijent uzeo lijek, ako se zna da je to bilo manje od 5 sati. Računanje zaustaviti ako se dostigne tačnost $10^{-4}$ ili kada je broj iteracija 5.

(25%)

2. Prilikom rješavanja problema iz statike kao konačno rješenje dobiva se sljedeći sistem jednačina

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dati sistem jednačina riješiti koristeći *Gauss-Seidelovu* metodu. Postupak rješavanja uraditi s tačnošću 0.1 ili kada broj iteracija bude 5.

(25%)

3. Period matematičkog klatna, dužine $L$ dat je izrazom:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0) \tag{1}$$

gdje je $g = 10$ m/s$^2$ gravitaciono ubrzanje, a $\theta_0$ početni otklon. Izračunati vrijednost $h(45°)$ ako je

$$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\theta_0}{2})\sin^2\theta}} \tag{2}$$

koristeći

a) *Simpsonovo* pravilo s dva jednaka intervala,

b) *Gaussove* kvadraturne formule ($n = 2$) s dva intervalom.

(15+15=30%)

4. Širenje zaraznih bolesti, kako bi se predvidio broj oboljelih u populaciji u nekom vremenu $[N(t)]$, može se u pojednostavljenom obliku prikazati sljedećom *Bernoullijevom* jednačinom

$$N'(t) = k(N_0 - N(t))N(t)$$

gdje je $k$ konstanta, $N_0$ je ukupna populacija, a vrijeme $t$ se mjeri u danima. Koristeći modifikovanu metodu srednje vrijednosti za rješavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, naći broj inficiranih, $N$, u prvih 5 dana, s korakom od 1 dan.

Podaci: $m = 100000$, $y(0) = 1000$, $k = 2 \cdot 10^{-6}$.

(25%)

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU - grupa A**

1. Lijek dat pacijentu ima koncentraciju u krvotoku datu jednačinom

   $$c(t) = Ate^{-t/3}$$

   u mg/ml, pri čemu je $t$ vrijeme u satima nakon što je pacijent uzeo $A$ jedinica lijeka. Nakon što je pacijent uzeo $e/3$ jedinica lijeka, izmjerena je koncentracija lijeka u krvotoku od 0.5 mg/ml. Koristeći metodu bisekcije odrediti vrijeme kada je pacijent uzeo lijek, ako se zna da je to bilo manje od 5 sati. Računanje zaustaviti ako se dostigne tačnost $10^{-4}$ ili kada je broj iteracija 5.

   (25%)

2. Prilikom rješavanja problema iz statike kao konačno rješenje dobiva se sljedeći sistem jednačina

   $$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   Dati sistem jednačina riješiti koristeći *Jacobijevu* metodu. Postupak rješavanja uraditi s tačnošću 0.1 ili kada broj iteracija bude 5.

   (25%)

3. Period matematičkog klatna, dužine $L$ dat je izrazom:

   $$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}h(\theta_0) \qquad (1)$$

   gdje je $g = 10$ m/s$^2$ gravitaciono ubrzanje, a $\theta_0$ početni otklon. Izračunati vrijednost $h(20^\circ)$ ako je

   $$h(\theta_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\theta_0}{2})\sin^2\theta}} \qquad (2)$$

   koristeći

   a) trapezno pravilo s tri jednaka intervala,

   b) *Gaussove* kvadraturne formule ($n = 2$) s jednim intervalom.

   (15+15=30%)

4. Širenje zaraznih bolesti, kako bi se predvidio broj oboljelih u populaciji u nekom vremenu [$N(t)$], može se u pojednostavljenom obliku prikazati sljedećom *Bernoullijevom* jednačinom

   $$N'(t) = k(N_0 - N(t))N(t)$$

   gdje je $k$ konstanta, $N_0$ je ukupna populacija, a vrijeme $t$ se mjeri u danima. Koristeći *Eulerovu* eksplicitnu za rješavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, naći broj inficiranih, $N$, u prvih 5 dana, s korakom od 1 dan.

   Podaci: $m = 100000$, $y(0) = 1000$, $k = 2 \cdot 10^{-6}$.

   (25%)

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

1. Objekat koji pada vertikalno kroz zrak izložen je viskoznom otporu zraka i utjecaju gravitacije. Ako je objekat mase $m$, bačen s visine $h_0$, promjena visine data je izrazom:

$$h(t) = h_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\dfrac{kt}{m}}\right)$$

gdje je $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ gravitaciono ubrzanje, $k = 10\ \mathrm{kg/s}$ koeficijent otpora zraka, $h_0 = 150\ \mathrm{m}$ i masa $m$ u kg. Koristeći metodu bisekcije izračunati masu objekta ako je vrijeme potrebno da objekat padne na zemlju 15 s. Zadatak uraditi s tačnošću $10^{-2}$ ili kada je broj iteracija jednak 5. Poznato je da je objekat teži od 1 kg i lakši od 100 kg.

(**25%**)

2. U Tabeli 1 dati su podaci o broju stanovnika na zemlji u periodu 1950-2000. godina.

Tabela 1

| Godina | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj stanovnika (u milijardama) | 2.55 | 2.99 | 3.56 | 4.33 | 5.13 | 6.18 |

Koristeći direktnu metodu naći vrijednost broja stanovnika 1992. godine. Rezultat provjeriti koristeci *Lagrangeovu* metodu. Koristiti tri podatka.

(17+8=**25%**)

3. Brzina padanja padobranca, $v$, data je izrazom

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\dfrac{k}{m}t}\right)$$

gdje je $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ gravitaciono ubrzanje, $m = 72\ \mathrm{kg}$ masa padobranca, $k = 20\ \mathrm{kg/s}$ koeficijent otpora zraka, a $t$ vrijeme padanja. Za zadate podatke uraditi sljedeće:

a) Izračunati visinu koju padobranac pređe u prvih 5 s padanja ($h = \int_0^t v dt$). Koristiti *Simpsonovo* pravilo s dvije podjele vremenskog intervala.

b) Izračunati ubrzanje koje padobranac ima na početku, u 2 s, te na kraju pete sekunde ($a = dv/dt$). Pri time, koristiti formule za diferenciranje koje pružaju najveću tačnost.

(12.5+12.5=**25%**)

4. Nasljedne osobine hemijskih rekacija mogu se modelirati sljedećom jednačinom

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_e - C}{\tau} \qquad C(0) = C_0$$

gdje je $C$ trenutni neuravnoteženi udio posmatrane komponente, $C_e$ je uravnoteženi udio koji se odnosi na lokalne uslove, i $\tau$ je karakter hemijskog relaksacionog vremena.
Izračunati vrijednosti $C(t)$ u periodu od 0 do 0.0005 s s korakom 0.0001, koristeći *Eulerovu* eksplicitnu metodu za rješavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

Podaci: $C_e = C_{e,0} + \alpha\sqrt{t}$, $\alpha = 1$, $C_{e,0} = 0.1$, $C(0) = 0$ i $\tau = 0.0001$.

(**25%**)

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU**

1. Brzina $v$ rakete *Saturn V* u vertikalnom letu u blizini zemlje može se aproksimirati sljedećim izrazom:

   $$v = u \ln \frac{M_0}{M_0 - \dot{m}t} - gt$$

   gdje je $u = 2510$ m/s brzina izduvavanja u odnosu na raketu, $M_0 = 2.8 \cdot 10^6$ kg masa rakete pri polijetanju, $\dot{m} = 13.3 \cdot 10^3$ kg/s brzina sagorijevanja goriva, $g = 9.81$ m/s$^2$ gravitaciono ubrzanje, a $t$ vrijeme polijetanja.

   Koristeći metodu sekante odredi vrijeme kada raketa dostigne brzinu od 335 m/s. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude 0.01 ili broj iteracija jednak 5.

   (25%)

2. Za laminarno tečenje koeficijent trenja, $f$, u cijevi može da se dovede u vezu s *Reynoldsovim* brojem, $\mathtt{Re}$, pomoću izraza

   $$f = a\mathtt{Re}^b$$

   Koristeći metodu najmanjih kvadrata odredi koeficijente $a$ i $b$, koristeći podatke iz sljedeće tabele.

Tablica 1

| Re | 100 | 300 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0.06 | 0.04 | 0.032 | 0.016 |

(25%)

3. Vertikalno pomjeranje površine ispod kontinuiranog opterećenja $q$ za cirkularni polu-beskonačni domen dato je izrazom:

   $$w(r) = w_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(r/a)^2 - \sin^2(\theta)}} d\theta$$

   Koristeći Gaussove kvadraturne formule s dva intervala odredi $w(r)/w_0$ za $r = 2a$, tj. odredi vrijednost integrala s desne strane za $r = 2a$.

   (25%)

4. Pri modeliranju jednog hemijskog procesa dobija se sljedeća diferencijalna jednačina

   $$\frac{dx}{dt} = a + b\sin(t) + cx$$

   gdje su konstante $a = 3$, $b = 5$ i $c = 0.2$. Koristeći *Eulerovu* modifikovanu metodu, naći vrijednost promjenljive $x$ u prvih 10 vremenskih jedinica, ako je vremenski korak $\Delta t = 2$ jedinice i x(0)=0.

   (25%)

---

**Vrijeme izrade - 135 minuta**

**Pismeni ispit iz NUMERIČKIH METODA u INŽENJERSTVU**

1. Zapremina tečnosti $V$ u elipsoidnom rezervoaru može se dobiti na osnovu dubine tečnosti $h$ pomoću izraza:

$$V = \frac{\pi abh^2}{3c^2}(3c - h)$$

Koristeći *Newtonovu* metodu naći dubinu $h$. Podaci: $V = \pi$ m$^3$, $a = 2$ m, $b = 1.5$ m, $c = 0.75$ m. Iterativni postupak zaustaviti kada tačnost bude $10^{-6}$ ili kada maksimalan broj iteracija bude 5.
**Napomena:** Dubina $h$ je u pravcu poluose $c$, tj. vrijedi $0 < h < 2c$, pa kao početnu aproksimaciju koristiti fizikalno moguću vrijednost.

(20%)

2. Brzinomjer u tijelu rakete zabilježio je podatke o promjeni njene brzine $v$ u vremenu $t$ - podaci su dati u tabeli 1.

Tablica 1

| $t$, s | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v$,m/s | 40 | 90 | 160 | 300 | 500 |

Potrebno je uraditi sljedeće:

a) Izračunati pređeni put od 1. do 9. sekunde koristeći *Simpsonovo* pravilo. Koristiti sve podatke.

(20%)

b) Koristeći metodu najmanjih kvadrata odrediti aproksimacionu funkciju brzine rakete oblika

$$\phi(x) = ax^b$$

(25%)

c) Koristeći prvi *Newtonov* interpolacioni polinom (trećeg reda), naći vrijednost brzine u vremenu $t = 2$ s.

(15%)

3. Voda istječe iz rezervoara koničnog oblika s kružnim ulivom prema izrazu

$$\frac{dx}{dt} = -0.5r^2\sqrt{2g}\frac{\sqrt{x}}{A(x)}$$

gdje je $r$ poluprečnik ulivnog dijela, $x$ nivo vode u odnosu na vrh konusa, a $A(x) = 0.2x^2$ površina poprečnog presjeka konusa na daljini $x$ od vrha. Koristeći *Eulerovu* eksplicitnu metodu odrediti nivo vode nakon 100 s koristeći 5 podjela.

Podaci: $r = 0.05$ m, $g = 10$ m/s$^2$, $h_0 = 3$ m.

(20%)

**Vrijeme izrade - 135 minuta**